

Licence de sciences, mention Mathématiques, Année L3

Calcul différentiel

Corrigé de l'examen

Janvier 2007

Exercice 1

- (a) Les deux composantes de l'application f sont de classe \mathcal{C}^∞ , donc l'application f est aussi de classe \mathcal{C}^∞ .
(b) On a

$$J_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} e^{x_0} & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (c) *Première solution.* Pour tout point (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 , le déterminant de la matrice jacobienne $J_f(x_0, y_0)$ de f en (x_0, y_0) est égal à $-e^{x_0}$. Puisque, pour tout nombre réel x_0 , on a $-e^{x_0} \neq 0$, le théorème d'inversion locale implique que l'application f est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme local en tout point de \mathbb{R}^2 . Par conséquent, l'image de f est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Deuxième solution. L'application $x \mapsto e^x$ est une bijection entre \mathbb{R} et $\mathbb{R}_{>0}$, où $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. De plus, pour tous nombres réels a et x , il existe un nombre réel y tel que $x - y = a$. Donc, l'image de f coïncide avec $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$. Il reste à remarquer que $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

- (d) Nous avons déjà montré que l'application f est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme local en tout point de \mathbb{R}^2 . Pour démontrer que f est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur son image, il reste à montrer que f est injective. Si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont des points de \mathbb{R}^2 tels que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, alors $e^{x_1} = e^{x_2}$ et $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$, d'où $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

Exercice 2

- (a) Considérons un point (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 et supposons que ce point est différent du point $(0, 0)$. On a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^2} ((3x_0^2 y_0 - y_0^3)(x_0^2 + y_0^2) - 2x_0(x_0^3 y_0 - x_0 y_0^3)),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^2} ((x_0^3 - 3x_0 y_0^2)(x_0^2 + y_0^2) - 2y_0(x_0^3 y_0 - x_0 y_0^3)).$$

Donc, $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ existent en tout point (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 tel que $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. De plus, $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ sont continues en tout point (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 tel que $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Montrons que $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ existent en $(0, 0)$ et sont continues en $(0, 0)$. On a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t, 0) - g(0, 0)}{t} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(0, t) - g(0, 0)}{t} = 0.$$

Donc, $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ existent en $(0, 0)$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

De plus, pour tout point (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 tel que $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \right| &\leq \left| \frac{1}{(x_0^2 + y_0^2)^2} ((3x_0^2 y_0 - y_0^3)(x_0^2 + y_0^2) - 2x_0(x_0^3 y_0 - x_0 y_0^3)) \right| \\ &\leq \frac{|y_0| |3x_0^2 - y_0^2|}{x_0^2 + y_0^2} + \frac{2x_0^2 |y_0| |x_0^2 - y_0^2|}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \\ &\leq |y_0| \left(\frac{3x_0^2}{x_0^2 + y_0^2} + \frac{y_0^2}{x_0^2 + y_0^2} + \frac{2x_0^4}{(x_0^2 + y_0^2)^2} + \frac{2x_0^2 y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \right) \leq 8|y_0|. \end{aligned}$$

De façon similaire,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \right| \leq 8|x_0|.$$

Ceci implique que $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ sont continues en $(0, 0)$. Donc, $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ existent en tout point de \mathbb{R}^2 et sont continues en tout point de \mathbb{R}^2 . Par conséquent, l'application g est de classe \mathcal{C}^1 .

(b) On a

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^3}{t^3} = -1, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(t, 0) - \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{t^3} = 1. \end{aligned}$$

Donc, $\frac{\partial g^2}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial g^2}{\partial x \partial y}$ existent en $(0, 0)$ et

$$\frac{\partial g^2}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g^2}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1.$$

(c) Puisque $\frac{\partial g^2}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial g^2}{\partial x \partial y}(0, 0)$, le théorème de Schwarz implique que l'application g n'est pas de classe \mathcal{C}^2 .

Exercice 3

(a) On a $1^2 + (-1)^2 - 1^3 = 1$ et $1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1$. Donc, le point $(1, -1, 1)$ est une solution de du système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^3 &= 1 \\ xyz + 2x &= 1. \end{cases}$$

(b) Considérons l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = (x^2 + y^2 - z^3 - 1, xyz + 2x - 1).$$

Les deux composantes f_1 et f_2 de l'application f sont de classe \mathcal{C}^1 , donc f est aussi de classe \mathcal{C}^1 . Pour tout point (x_0, y_0, z_0) de \mathbb{R}^3 , on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) &= 2x_0, & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) &= -3z_0^2, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) &= y_0z_0 + 2, & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) &= x_0y_0.\end{aligned}$$

Si $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 1)$, le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2x_0 & -3z_0^2 \\ y_0z_0 + 2 & x_0y_0 \end{pmatrix}$$

est égal au déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et est différent de 0. Donc, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un nombre strictement positif ε et des applications $\varphi :]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi :]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 tels que $\varphi(-1) = \psi(-1) = 1$ et, pour tout $y \in]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[$, on ait $f(\varphi(y), y, \psi(y)) = 0$ (c'est-à-dire, $(\varphi(y), y, \psi(y))$ est une solution du système).

(c) Puisque $f(\varphi(y), y, \psi(y)) = 0$ pour tout $y \in]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1, -1, 1) \cdot \varphi'(-1) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(1, -1, 1) + \frac{\partial f_1}{\partial z}(1, -1, 1) \cdot \psi'(-1) &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1, -1, 1) \cdot \varphi'(-1) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(1, -1, 1) + \frac{\partial f_2}{\partial z}(1, -1, 1) \cdot \psi'(-1) &= 0, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} 2\varphi'(-1) - 3\psi'(-1) &= 2 \\ \varphi'(-1) - \psi'(-1) &= -1. \end{cases}$$

Par conséquent, $\varphi'(-1) = -5$ et $\psi'(-1) = -4$.

Exercice 4

Soit (x_0, y_0) un point de $E \times F$. Alors, pour tout $(h_1, h_2) \in E \times F$, on a

$$B(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - B(x_0, y_0) = B(x_0, h_2) + B(h_1, y_0) + B(h_1, h_2).$$

Remarquons que l'application

$$\begin{aligned}L : E \times F &\rightarrow G, \\ (h_1, h_2) &\mapsto B(x_0, h_2) + B(h_1, y_0)\end{aligned}$$

est linéaire. De plus, il existe un nombre réel strictement positif M tel que

$$\|B(h_1, h_2)\|_G \leq M\|h_1\|_E\|h_2\|_F$$

pour tout $(h_1, h_2) \in E \times F$. Donc,

$$\lim_{\|(h_1, h_2)\|_{E \times F} \rightarrow 0} \frac{\|B(h_1, h_2)\|_G}{\|(h_1, h_2)\|_{E \times F}} = 0,$$

où $\|(h_1, h_2)\|_{E \times F} = \max\{\|h_1\|_E, \|h_2\|_F\}$. Par conséquent, l'application B est différentiable en (x_0, y_0) et

$$B'(x_0, y_0)(h_1, h_2) = B(x_0, h_2) + B(h_1, y_0)$$

pour tout $(h_1, h_2) \in E \times F$.

Exercice 5

(a) Montrons que $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \neq |x_2|\}$ est l'ensemble des points où H est différentiable.

Tout d'abord, H n'est pas différentiable en $(0, 0)$. En effet, choisissons un vecteur non nul (h_1, h_2) dans \mathbb{R}^2 . Si H était différentiable en $(0, 0)$, alors on aurait

$$H'(0, 0)(h_1, h_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{H(th_1, th_2) - H(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} \|(h_1, h_2)\|_\infty.$$

La dernière limite n'existe pas, donc H n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Considérons maintenant un point (x_1, x_2) de \mathbb{R}^2 tel que $|x_1| = |x_2|$ et $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Pour tout h_1 dans \mathbb{R} tel que $|h_1|$ soit suffisamment petit, on a

$$H(x_1 + h_1, x_2) - H(x_1, x_2) = \begin{cases} |h_1|, & \text{si } \text{sign}(h_1) = \text{sign}(x_1), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc,

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{H(x_1 + h_1, x_2) - H(x_1, x_2)}{h_1}$$

n'existe pas, ce qui signifie que H n'est pas différentiable en (x_1, x_2) .

Considérons finalement un point (x_1, x_2) de \mathbb{R}^2 tel que $|x_1| \neq |x_2|$ (supposons que $|x_1| > |x_2|$). Pour tout (h_1, h_2) dans \mathbb{R}^2 tel que $\|(h_1, h_2)\|_\infty$ soit suffisamment petit, on a $|x_1 + h_1| > |x_2 + h_2|$ et $|h_1| < |x_1|$, d'où

$$\begin{aligned} H(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - H(x_1, x_2) &= \text{sign}(x_1) \cdot (x_1 + h_1) - \text{sign}(x_1) \cdot x_1 \\ &= \text{sign}(x_1) \cdot h_1. \end{aligned}$$

Donc, H est différentiable en (x_1, x_2) .

(b) Montrons que

$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \text{il existe } i \text{ tel que } |x_i| > |x_j| \text{ pour tout } j = 1, \dots, n, j \neq i\}$

est l'ensemble des points où H_n est différentiable.

Tout d'abord, H_n n'est pas différentiable en $(0, \dots, 0)$. En effet, choisissons un vecteur non nul (h_1, \dots, h_n) dans \mathbb{R}^n . Si H_n était différentiable en $(0, \dots, 0)$, alors on aurait

$$\begin{aligned} H'_n(0, \dots, 0)(h_1, \dots, h_n) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{H(th_1, \dots, th_n) - H(0, \dots, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} \|(h_1, \dots, h_n)\|_\infty. \end{aligned}$$

La dernière limite n'existe pas, donc H_n n'est pas différentiable en $(0, \dots, 0)$.

Considérons maintenant un point (x_1, \dots, x_n) de \mathbb{R}^n tel que, pour certains i et j , on ait $|x_i| = |x_j|$, $|x_i| > 0$ et $|x_i| \geq |x_k|$ pour tout $k = 1, \dots, n$. Pour tout h_i dans \mathbb{R} tel que $|h_i|$ soit suffisamment petit, on a

$$\begin{aligned} H_n(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - H_n(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ = \begin{cases} |h_i|, & \text{si } \text{sign}(h_i) = \text{sign}(x_i), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{H_n(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - H_n(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{h_i}$$

n'existe pas, ce qui signifie que H_n n'est pas différentiable en (x_1, \dots, x_n) .

Considérons finalement un point (x_1, \dots, x_n) de \mathbb{R}^n pour lequel il existe i tel que $|x_i| > |x_j|$ pour tout $j = 1, \dots, n, j \neq i$. Pour tout (h_1, \dots, h_n) dans \mathbb{R}^n tel que $\|(h_1, \dots, h_n)\|_\infty$ soit suffisamment petit, on a $|x_i + h_i| > |x_j + h_j|$ pour tout $j = 1, \dots, n, j \neq i$, et $|h_i| < |x_i|$, d'où

$$\begin{aligned} H_n(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - H_n(x_1, \dots, x_n) &= \text{sign}(x_i) \cdot (x_i + h_i) - \text{sign}(x_i) \cdot x_i \\ &= \text{sign}(x_i) \cdot h_i. \end{aligned}$$

Donc, H_n est différentiable en (x_1, \dots, x_n) .