Linear Algebra Appl., **311**(2000), 25–34

Le 7 Février 2000

Généralisation de l'identité de Scott sur les permanents

Guo-Niu HAN

Résumé. — On redémontre et généralise une identité de Scott sur les permanents à l'aide d'un théorème récent de Lascoux. Nous obtenons par exemple le résultat suivant : Soient $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ les racines de $x^n - 1 = 0$ et de $y^n + y - 1 = 0$, respectivement. Alors le permanent de la matrice formée par $1/(x_i - y_j)$ est égale à n^n.

Abstract. — The Scott identity on permanents is reproved and generalized by means of a recent theorem due to Lascoux. For example, the following result is derived : let $x_1, \ldots, x_n$ and $y_1, \ldots, y_n$ be the roots of the polynomials $x^n - 1$ and $y^n + y - 1$, respectively. Then the permanent of the matrix $(1/(x_i - y_j))$ is equal to n^n.

1. Introduction

En 1881, Scott [12] a donné, sans démonstration, le résultat suivant :

Soient $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$, les racines de $x^n - 1 = 0$ et de $y^n + 1 = 0$ respectivement. Soit A la matrice de dimension $n \times n$ dont le coefficient en (i, j) est $1/(x_i - y_j)$. Alors on a

$$\operatorname{per}(A) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{n(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2))^2}{2^n}, & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ 0, & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$$

En 1978, Minc [10, p. 155], dans son livre *Permanents*, a inclus ce résultat dans une liste de conjectures sur les permanents. Dès lors, plusieurs démonstrations ont été obtenues [2, 6, 13], dont une par Minc lui-même [11]. Curieusement, les démonstrations proposées ont toutes utilisé le fait que les racines de ces deux polynômes $x^n - 1$ et $y^n + 1$ avaient des formes explicites simples, à partir desquelles on pouvait obtenir la valeur de $\operatorname{per}(A)$.

Dans le présent article, on redémontre l'identité de Scott, sans partir des expressions analytiques de ces racines, en opérant seulement dans l'algèbre des polynômes. On utilise des techniques récentes sur les fonctions symétriques, notamment un théorème de Lascoux [7], que celui-ci a établi dans son étude du modèle de la glace carrée en mécanique statistique. Cette nouvelle méthode nous permet de démontrer une généralisation de l'identité de Scott, qui possède plusieurs cas particuliers intéressants. Citons l'exemple suivant, où le permanent se réfère à des polynômes moins spéciaux que dans l'identité originelle de Scott et qui a pourtant une expression très simple (*cf.* Corollaire 8) :

> *Soient $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ les racines de $x^n - 1 = 0$ et de $y^n + y - 1 = 0$, respectivement. Soit A la matrice de dimension $n \times n$ dont le coefficient en (i, j) est $1/(x_i - y_j)$. Alors on a*
>
> $$\mathrm{per}(A) = n^n.$$

Notre résultat général est le théorème suivant :

Théorème 1. — *On se fixe deux entiers r et n, premiers entre eux, tels que $0 < r < n$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ les racines de $x^n - 1 = 0$ et de $y^n + ay^r + b = 0$, respectivement. Soit A la matrice de dimension $n \times n$ dont le coefficient en (i, j) est $1/(x_i - y_j)$. Alors on a,*

$$\mathrm{per}(A) = \frac{(-1)^{n+1}}{(b+1)^n - (-a)^n} \prod_{i=1}^{n} \big(i - (n-i)b\big).$$

En spécialisant les paramètres a et b du Théorème 1, on obtient plusieurs cas particuliers, qu'on a préféré énoncer comme des corollaires dans le paragraphe suivant. La démonstration du Théorème 1 fait l'objet du paragraphe 3. Comme le permanent $\mathrm{per}(A)$ peut s'obtenir comme une somme d'involutions par un certain poids [4], on propose, dans le dernier paragraphe, une étude combinatoire de cette propriété pour le seul cas de l'identité de Scott.

2. Corollaires

Pour simplifier les énoncés, il est commode de noter le permanent $\mathrm{per}(A)$ du Théorème 1 comme

$$\mathrm{PER}(x^n - 1,\ y^n + ay^r + b) := \mathrm{per}(A).$$

Les corollaires suivants sont des conséqences directes du Théorème 1.

Corollaire 1. — *Soit $\mathrm{pgcd}(n, r) = 1$, on a*

$$\mathrm{PER}(x^n - 1,\ y^n + ay^r) = \frac{(-1)^{n+1}}{1 - (-a)^n}\ n!$$

Corollaire 2. — *On a* $\mathrm{PER}(x^n-1,\ y^n)=(-1)^{n+1}n!$

Dans ce dernier exemple, toutes les racines y_k du polynômes y^n sont évidemment nulles ; on peut donc démontrer le Corollaire 2 directement.

Corollaire 3. — *Si n est impair, on a* $\mathrm{PER}(x^n-1,\ y^n+y^{n-1})=n!/2$.

Cette fois-ci, plusieurs racines y_k sont nulles ; on peut donc démontrer le Corollaire 3 directement. Il faut utiliser pour cela le Lemme 3 du paragraphe 4 et l'on obtient :

$$\begin{aligned}(n-1)!\Big(\frac{x_1}{x_1+1}+\cdots+\frac{x_n}{x_n+1}\Big)\\ =(n-1)!\Big(n-\Big(\frac{1}{x_1+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1}\Big)\Big)=(n-1)!\,(n-n/2).\end{aligned}$$

Corollaire 4. — *Si n est impair, on a* $\mathrm{PER}(x^n-1,\ y^n+y)=n!/2$.

Bien que ce corollaire ait un énoncé très similaire à celui du Corollaire 3, nous n'avons ni démonstration directe, ni transformation qui permet de passer d'un corollaire à l'autre.

Corollaire 5. — *On a*

$$\mathrm{PER}(x^n-1,\ y^n+ay+1)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n(1\cdot3\cdot5\cdots(n-2))^2}{2^n-(-a)^n}, & \textit{si } n \textit{ est impair},\\ 0, & \textit{si } n \textit{ est pair.}\end{cases}$$

Il est remarquable que le numérateur ne dépend pas de a. Si $a=0$ on retrouve l'identité de Scott.

Corollaire 6 (Scott). — *On a*

$$\mathrm{PER}(x^n-1,\ y^n+1)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\ \frac{n(1\cdot3\cdot5\cdots(n-2))^2}{2^n}, & \textit{si } n \textit{ est impair},\\ 0, & \textit{si } n \textit{ est pair.}\end{cases}$$

Corollaire 7. — *Soit* $\mathrm{pgcd}(n,r)=1$*, on a*

$$\mathrm{PER}(x^n-1,\ y^n+ay^r-1)=(n/a)^n\ .$$

Corollaire 8. — *On a*

$$\begin{aligned}&\mathrm{PER}(x^n-1,\ y^n+y-1)=n^n;\\ &\mathrm{PER}(x^n-1,\ y^n-y-1)=(-n)^n.\end{aligned}$$

Corollaire 9. — *On a*

$$\begin{aligned}&\mathrm{PER}(x^n-1,\ y^n+y^{n-1}-1)=n^n;\\&\mathrm{PER}(x^n-1,\ y^n-y^{n-1}-1)=(-n)^n.\end{aligned}$$

Nous n'avons pas de démonstration directe pour les Corollaires 8 et 9, mais nous pouvons passer de l'un à l'autre par une transformation simple. En effet, si $x_i^n-1=0$, alors $(1/x_i)^n-1=0$; si $y_j^n+y_j-1=0$, il est évident que $y_j\neq 0$. On peut donc poser $z_j=1/y_j$ et vérifier que z_j satisfait l'équation : $z_j^n-z_j^{n-1}-1=0$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{per}\Bigl(\frac{1}{x_i-z_j}\Bigr)&=\mathrm{per}\Bigl(\frac{1}{x_i-1/y_j}\Bigr)=\mathrm{per}\Bigl(\frac{y_j/x_i}{y_j-1/x_i}\Bigr)\\&=(-1)^n\frac{\prod y_j}{\prod x_i}\mathrm{per}\Bigl(\frac{1}{1/x_i-y_j}\Bigr)=(-1)^n\mathrm{per}\Bigl(\frac{1}{x_i-y_j}\Bigr).\end{aligned}$$

3. Démonstration du théorème 1

Soient $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ et $Y=\{y_1,\ldots,y_n\}$ deux alphabets quelconques. Pour le moment, on suppose que les x_i et les y_j sont de simples variables. A la fin du calcul seulement, on les considèrera comme des racines de polynômes. Posons

$$R(X,Y):=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x_i-y_j)\quad\text{et}\quad\Delta(X):=\prod_{i<j}(x_i-x_j),$$

ce dernier déterminant étant le déterminant usuel de Vandermonde. On utilise, tout d'abord, les deux théorèmes classiques suivants ([1], [3], [10, p. 6], [9, p. 67]).

Théorème (Cauchy). — *On a*

$$\det\Bigl(\frac{1}{x_i-y_j}\Bigr)=(-1)^{n(n-1)/2}\frac{\Delta(X)\Delta(Y)}{R(X,Y)}.$$

Théorème (Borchardt). — *On a*

$$\det\Bigl(\frac{1}{(x_i-y_j)^2}\Bigr)=\det\Bigl(\frac{1}{x_i-y_j}\Bigr)\mathrm{per}\Bigl(\frac{1}{x_i-y_j}\Bigr).$$

On pose

$$F(X,Y):=(-1)^{n(n-1)/2}\det\Bigl(\frac{1}{(x_i-y_j)^2}\Bigr)\frac{R(X,Y)^2}{\Delta(X)\Delta(Y)},\tag{1}$$

D'après les deux théorèmes précédents, on peut écrire :

$$\mathrm{per}\Big(\frac{1}{x_i - y_j}\Big) = \frac{F(X,Y)}{R(X,Y)}. \tag{2}$$

Pour calculer ce permanent, il faut évaluer $F(X,Y)$. Nous faisons alors appel à un théorème de Lascoux [7] sur les fonctions symétriques. Ce dernier réussit à exprimer le déterminant $\det(1/(x_i - y_j)(qx_i - y_j))$, où q est une variable, comme le déterminant d'un produit de matrices $H(X) \cdot E(Y)$, où les coefficients de $H(X)$ (resp. de $E(Y)$) ne dépendant que des fonctions symétriques complètes $h_k(X)$ en les variables x_i de l'alphabet X (resp. des fonctions symétriques élémentaires $e_k(Y)$ en les variables y_j de l'alphabet Y). On peut se reporter à l'ouvrage de Macdonald [9] pour les propriétés usuelles de ces fonctions. Lorsque $q = 1$, le résultat que nous utilisons est le suivant, où l'on convient que les fonctions $h_k(X)$ et $e_k(Y)$ sont nulles lorsque k est négatif.

Théorème (Lascoux). — *On définit deux matrices rectangulaires $H(X)$ de dimension $n \times (2n-1)$ et $E(Y)$ de dimension $(2n-1) \times n$ par*

$$H(X) := [h_{j-i}(X)]_{1 \le i \le n, 1 \le j \le 2n-1},$$

et

$$E(Y) := \Big[(j - 2k + 2)(-1)^{n-j+k-1} e_{n-j+k-1}(Y)\Big]_{1 \le j \le 2n-1, 1 \le k \le n}.$$

Alors on a

$$F(X,Y) = \det\big(H(X)E(Y)\big).$$

Plaçons-nous désormais dans les conditions du Théorème 1. Autrement-dit, convenons que $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ sont les racines de $x^n - 1 = 0$ et de $y^n + ay^r + b = 0$, respectivement. Pour obtenir l'expression de $\mathrm{per}(A)$, il nous suffit donc, d'après (2), de trouver une forme explicite pour $F(X,Y)$ et $R(X,Y)$ dans ce cas particulier. Tout d'abord, les fonctions symétriques $h_k(X)$ et $e_k(Y)$ ont les valeurs suivantes

$$h_k(X) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0, n\,; \\ 0, & \text{si } k \neq n \text{ et } 1 \le k \le 2n-1\,; \end{cases}$$

et

$$e_k(Y) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0\,; \\ (-1)^{n-r}a, & \text{si } k = n-r\,; \\ (-1)^n b. & \text{si } k = n\,; \\ 0, & \text{si } k \neq n-r \text{ et } 1 \le k \le n-1\,; \end{cases}$$

d'où l'on tire la forme explicite pour les coefficients des matrices $H(X)$ et $E(Y)$. Notons $\mathbf{D}_k(c;d) := \mathrm{diag}(c, c{+}d, \ldots, c{+}(k{-}1)d)$ la matrice diagonale d'ordre k dont les coefficients diagonaux sont $c, c+d, \ldots, c+(k-1)d$, puis $\mathbf{I}_k = \mathbf{D}_k(1;0)$ la matrice carrée identité d'ordre k et $\mathbf{0}_{l,c}$ la matrice de dimension $l \times c$ dont tous les coefficients sont nuls. On a :

$$H(X) = \left(\mathbf{I}_n \;\middle|\; \begin{matrix} \mathbf{I}_{n-1} \\ \mathbf{0}_{1,n-1} \end{matrix} \right),$$

et $E(Y) = E_1(Y) + E_2(Y)$ avec :

$$E_1(Y) = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{n-1,1} & \mathbf{D}_{n-1}(-b;-b) \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\mathbf{D}_n(n,-1)} \end{array} \right) \quad \text{et} \quad E_2(Y) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{r-1,n} \\ \mathbf{D}_n(ra;-a) \\ \mathbf{0}_{n-r,n} \end{pmatrix}.$$

Par de simples manipulations sur le produit de deux matrices, on obtient :

$$P_1 := H(X)E_1(Y) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n-1,1} & \mathbf{D}_{n-1}(n-1-b;-1-b) \\ n & \mathbf{0}_{1,n-1} \end{pmatrix},$$

et

$$P_2 := H(X)E_2(Y) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{r-1,n-r+1} & \mathbf{D}_{r-1}((2r-n-1)a;-a) \\ \mathbf{D}_{n-r+1}(ra;-a) & \mathbf{0}_{n-r+1,r-1} \end{pmatrix}.$$

On voit que dans la matrice P_2 il existe une ligne ayant tous ses coefficients nuls. Comme n et r sont premiers entre eux, un simple argument géométrique sur la position des lignes montre que $\det(P_1 + P_2) = \det(P_1)$. On a ainsi

$$F(X,Y) = \det(P_1) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} (i - (n-i)b). \tag{3}$$

Remarque 1. — La condition $\operatorname{pgcd}(n,r) = 1$ est essentielle.

Remarque 2. — L'expression $F(X,Y)$ ne depend pas de a.

Exemple. — Pour $n = 5$ et $r = 3$, les matrices $H(X), E(Y)$ et leur produit sont respectivement :

$$\begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} . & -b & . & . & . \\ . & . & -2b & . & . \\ 3a & . & . & -3b & . \\ . & 2a & . & . & -4b \\ 5 & . & a & . & . \\ . & 4 & . & 0 & . \\ . & . & 3 & . & -a \\ . & . & . & 2 & . \\ . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & 4-b & . & 0 & . \\ . & . & 3-2b & . & -a \\ 3a & . & . & 2-3b & . \\ . & 2a & . & . & 1-4b \\ 5 & . & a & . & . \end{bmatrix}.$$

On vérifie que $\mathrm{pgcd}(5,3) = 1$ et que l'on a :

$$\det \begin{bmatrix} . & 4{-}b & . & 0 & . \\ . & . & 3{-}2b & . & -a \\ 3a & . & . & 2{-}3b & . \\ . & 2a & . & . & 1{-}4b \\ 5 & . & a & . & . \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} . & 4{-}b & . & . & . \\ . & . & 3{-}2b & . & . \\ . & . & . & 2{-}3b & . \\ . & . & . & . & 1{-}4b \\ 5 & . & . & . & . \end{bmatrix}.$$

Pour calculer $R(X,Y)$, on utilise le lemme suivant sur le résultant, qui a été explicité par Jouanolou [5].

Lemme. — *Soit δ le plus grand commun diviseur de deux entiers m, n et soient A, C deux constantes non-nulles. Alors le résultant des deux polynômes $Ax^m - B$ et $Cx^n - D$ est donné par :*

$$\mathrm{Res}(Ax^m - B, Cx^n - D) = (-1)^m \big(A^{n/\delta} D^{m/\delta} - B^{n/\delta} C^{m/\delta}\big)^{\delta}.$$

Revenons au calcul de $R(X,Y)$. Si $a = 0$, on en déduit simplement $R(X,Y) = \mathrm{Res}(x^n - 1,\ x^n + b) = (b+1)^n$. Si $a \neq 0$, on applique encore le précédent lemme en utilisant l'hypothèse $\mathrm{pgcd}(n,r) = 1$. D'après les proprétés du résultant [5], on obtient :

$$\begin{aligned} R(X,Y) &= \mathrm{Res}(x^n - 1,\ x^n + ax^r + b) \\ &= \mathrm{Res}(x^n - 1,\ ax^r + b + 1) \\ &= (-1)^{n+1}\big(a^n - (-b-1)^n\big). \end{aligned} \tag{4}$$

En combinant les formules (2), (3) et (4), on obtient bien la démonstration du Théorème 1.

4. Somme des involutions

Dans [4], on a obtenu une expression du permanent $\mathrm{per}(A)$ comme une somme d'involutions par une certaine fonction poids. Soient $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ deux alphabets quelconques. Pour tout $s \in Y$, posons

$$L(s) := L(s; X, Y) := \sum_{y \in Y, y \neq s} \frac{1}{s - y} + \sum_{x \in X} \frac{1}{x - s}, \tag{5}$$

et notons $\mathcal{I}(n)$ l'ensemble des permutations involutives d'ordre n. Comme chaque involution $\sigma \in \mathcal{I}(n)$ se décompose en un produit de cycles disjoints, on peut définir une fonction poids Ψ sur $\mathcal{I}(n)$ en posant

$$\Psi(\sigma) := \prod_{(uv) \in \sigma} \frac{1}{(y_u - y_v)^2} \prod_{(w) \in \sigma} L(y_w)$$

où le premier produit est sur l'ensemble des transpositions de σ et le second produit sur l'ensemble des points fixes de σ.

Théorème 2. — *On a*

$$\operatorname{per}\Big(\frac{1}{x-y}\Big) = \sum_{\sigma\in\mathcal{I}(n)} \Psi(\sigma). \tag{6}$$

Sous les conditions de Scott, c'est-à-dire en supposant que $x_1,\dots,x_n$ et $y_1,\dots,y_n$ sont les racines de $x^n-1=0$ et de $y^n+1=0$, respectivement, cette fonction poids Ψ admet une expression simple. Il est aisé de vérifier le résultat suivant :

Lemme 3. — *Soit P un polynôme symétrique de n variables, de dégré total $r<n$. Alors la valeur de ce polynôme au point X tel que $R(x,X)=x^n-1$ est égale à $P(X)=P(0,\dots,0)$.*

Pour tout s, on a

$$\sum_x \frac{1}{x-s} = \frac{1}{(x_1-s)(x_2-s)\cdots(x_n-s)} Q(x_1,\dots,x_n),$$

où Q est un polynôme symétrique de dégré total $(n-1)$. D'après le Lemme 3, on a $Q(x_1,\dots,x_n)=Q(0,\dots,0)=n(-s)^{n-1}$. D'où

$$\sum_x \frac{1}{x-s} = \frac{ns^{n-1}}{1-s^n}.$$

De la même façon, on a pour tout s :

$$\sum_y \frac{1}{s-y} = \frac{ns^{n-1}}{s^n+1}.$$

Pour chaque $s\in Y$, posons

$$\begin{aligned} J(s,\alpha) := \sum_{y\neq s} \frac{1}{\alpha s-y} &= \sum_y \frac{1}{\alpha s-y} - \frac{1}{\alpha s-s} \\ &= \frac{n\alpha^{n-1}s^{n-1}}{\alpha^n s^n+1} - \frac{1}{(\alpha-1)s} = \frac{-n\alpha^{n-1}}{(1-\alpha^n)s} - \frac{1}{(\alpha-1)s}. \end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{y\neq s} \frac{1}{s-y} = J(s,1) = \frac{n-1}{2s}.$$

On obtient ainsi, pour tout $s \in Y$, une expression simple de $L(s)$:

$$L(s) = \frac{n-1}{2s} + \frac{ns^{n-1}}{1-s^n} = \frac{n-1}{2s} + \frac{-n}{2s} = -\frac{1}{2s}. \tag{7}$$

Remarque. — Ces calculs se font de façon aisée dans l'algèbre des Λ-anneaux [8], mais il faut alors faire des rappels sur ces structures.

En combinant les formules (6), (7) et l'identité de Scott (i.e., Corollaire 6), on obtient :

Propostion 4. — *Soient $y_1, \ldots, y_n$ les racines de $y^n + 1 = 0$. On a*

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{I}(n)} \prod_{(uv)\in\sigma} \frac{1}{(y_u - y_v)^2} \prod_{(w)\in\sigma} \frac{-1}{2y_w}$$
$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{n(1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2))^2}{2^n}, & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ 0, & \textit{si } n \textit{ est pair,} \end{cases}$$

où le premier produit est fait sur l'ensemble des transpositions de σ et le second produit sur l'ensemble des points fixes de σ.

Un raisonnement analogue en utilisant cette fois le Corollaire 8 conduit au résultat suivant.

Propostion 5. — *Soient $y_1, \ldots, y_n$ les racines de $y^n + y - 1 = 0$. On a*

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{I}(n)} \prod_{(uv)\in\sigma} \frac{1}{(y_u - y_v)^2} \prod_{(w)\in\sigma} \frac{n(1-y_w)(ny_w - y_w - 2n)}{2y_w^2(ny_w - y_w - n)} = n^n,$$

où le premier produit est fait sur l'ensemble des transpositions de σ et le second produit sur l'ensemble des points fixes de σ.

Références

[1] C. W. Borchardt. — Bestimmung der symmetrischen Verbindungen ihrer erzeugenden Funktion, *Crelle J.*, **53**(1855), p. 193-198.

[2] D. Callan. — On evaluating permanents and a matrix of cotangents, *Linear and Multilinear Algebra*, **38**(1995), p. 193-205.

[3] A. L. Cauchy. — Mémoire sur les fonctions alternées et les sommese alternées, Exercices d'analyse et de phys. math., 1841, 151-159.

[4] G.-N. Han. — Interpolation entre le déterminant de Cauchy et le déterminant de Borchardt, en préparation, 1999.

[5] J.-P. Jouanolou. — *Polynômes cyclotomiques : Théorie élémentaire et applications.* — Prépublication, Université de Strasbourg I, 96 pages, 1990.

[6] R. Kittappa. — Proof of a conjecture of 1881 on permanents, *Linear and Multilinear Algebra*, **10**(1981), p. 75-82.

[7] A. Lascoux. — Square-ice Enumeration, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, vol. **42**, The Andrews Festschrift, B42p(1998), 15 pages.

[8] A. Lascoux et M.-P. Schützenberger. — *Formulaire raisonné de fonctions symétriques.* — Publication LITP, Université Paris 7, 1985.

[9] I. G. Macdonald. — *Symmetric functions and Hall polynomials*, second edition. Clarendon Press, Oxford, 1995.

[10] H. Minc. — *Permanents.* — Encyclopedia of mathematics and its applications, vol. 6, Addison-Wesley, Mass, 1978.

[11] H. Minc. — On a conjecture of R. F. Scott, *Linear Algebra Appl.*, **28**(1979), p. 141-153.

[12] R. F. Scott. — Mathematical notes, *Messenger of Math.*, **10**(1881), p. 142-149.

[13] D. Svrtan. — Proof of Scott's conjecture, *Proc. Amer. Math. Sco.*, **87**(1983), p. 203-207.

I.R.M.A. et C.N.R.S.
Université Louis Pasteur
7, rue René-Descartes
F-67084 Strasbourg
guoniu@math.u-strasbg.fr