J. Computational and Applied Math., **68**(1996), 159–162

Une démonstration "vérificative" d'un résultat de Foata-Zeilberger sur les relations bipartitionnaires

Guo-Niu HAN (*)

Résumé. — A l'aide d'un programme informatique réalisant toutes les vérifications utiles, on redémontre une condition nécessaire pour que les deux statistiques maj'_U et inv'_U soient équidistribuées sur toute classe de réarrangements de mots. Ce résultat est la partie "seulement si" du théorème 1 dans [FZ].

Abstract. — With the help of a computer program that makes all the relevant verifications we reprove a necessary condition for the two statistics maj'_U and inv'_U to be equidistributed on every class of rearrangements. This result is the "only if" part of theorem 1 in [FZ].

On reprend les notations utilisées dans [FZ]. Considérons l'ensemble $[r] = \{1, 2, \cdots, r\}$. Pour tout sous-ensemble (ou *relation*) $U \subset [r] \times [r]$, on définit deux statistiques sur le monoïde libre $[r]^*$ comme suit. Soit $w = x_1 x_2 \cdots x_m \in [r]^*$ un mot, on pose (*cf.* [FZ]) :

$$\begin{aligned}\operatorname{maj}'_U w &= \sum_{i=1}^{m-1} i\chi((x_i, x_{i+1}) \in U),\\ \operatorname{inv}'_U w &= \sum_{1\le i<j\le m} \chi((x_i, x_j) \in U).\end{aligned}$$

D'autre part, un sous-ensemble $U \subset [r] \times [r]$ est appelé *relation bipartitionnaire*, si les deux conditions suivantes sont satisfaites (*cf.* [FZ, H]) :

$$\begin{aligned}(x, y) \in U \text{ et } (y, z) \in U &\Longrightarrow (x, z) \in U;\\ (x, y) \notin U \text{ et } (z, y) \in U &\Longrightarrow (z, x) \in U.\end{aligned}$$

Théorème 1 (Foata et Zeilberger). — *Les deux statistiques* maj'_U *et* inv'_U *sont équidistribuées sur toute classe de réarrangements de mots, si et seulement si le sous-ensemble* U *est une relation bipartitionnaire.*

La démonstration originale de la partie "seulement si" du théorème précédent donnée dans [FZ, section 6] consiste à étudier une série de propriétés que doit satisfaire U pour qu'il y ait équidistribution (lemme 6.1 à lemme 6.7) et ensuite à les rassembler.

(*) Avec le concours du programme des Communautés Européennes en Combinatoire Algébrique, 1994-95.

Dans cette note, on propose une autre démonstration pour ce même résultat, qui consiste à calculer toutes les valeurs numériques à l'aide d'un programme informatique. Si on prend $[r] = \{1, 2, 3\}$, il y a $2^9 = 512$ sous-ensembes $U \subset [r]\times[r]$. On note $R(xyz)$ la classe de tous les réarrangements du mot xyz. Pour établir notre résultat, il nous faut tout d'abord calculer les valeurs numériques de ces deux statistiques maj'_U et inv'_U pour tous mots dans les classes $R(123), R(112), R(122), R(113), R(133), R(223)$ et $R(233)$ (il y a donc 24576 statistiques à calculer). D'après les résultats obtenus, on observe que, pour $r = 3$, ou de la même façon pour $r = 2$, la condition "U est bipartitionnaire" est nécessaire.

Les résultats du calcul sont consigné dans l'appendice, et ils sont vérifiables à la main. Considérons, par exemple, le sous-ensemble $U = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$. Cette relation peut être représentée par la matrice $\begin{bmatrix} & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \end{bmatrix}$ (première colonne vide), ou comme dans l'appendice, par la ligne [••| ••| •]. (Cet exemple est marqué dans l'appendice par la flèche "$\rightarrow$"). Pour la classe $R(233)$, on vérifie (colonnes O et P dans l'appendice)

$$\mathrm{maj}'_U(332) = 2,\ \ \mathrm{maj}'_U(233) = 1,\ \ \mathrm{maj}'_U(323) = 3;$$
$$\mathrm{inv}'_U(332) = 2,\ \ \mathrm{inv}'_U(233) = 2,\ \ \mathrm{inv}'_U(323) = 2.$$

Ces deux statistiques ne sont pas équidistribuées dans cette classe. D'autre part, on vérifie aussi que U n'est pas bipartitionnaire (colonne B).

Pour $r \geq 4$, si $U \in [r] \times [r]$ n'est pas bipartitionnaire, d'après la définition, il existe trois lettres $x, y, z \in [r]$, telles que la relation induite par U sur l'alphabet $\{x, y, z\}$ ne soit pas bipartitionnaire non plus. D'après le résultat précédent, il existe alors au moins une classe de réarrangements (de type $R(xyz)$ ou $R(xxy)$), sur laquelle, les deux statistiques ne sont pas équidistribuées.

Appendice

Pour la vérification effective du résultat, c'est-à-dire, l'examen des 512 cas, nous avons construit une table de 512 lignes. Son impression occupe douze pages, qui ne sont pas reproduites dans cette note, mais qui sont à la disposition des rédacteurs et de chaque lecteur intéressé. (`http ://cartan.u-strasbg.fr/s̃lc/misc/hanonlyif.html`)

Dans la table, la colonne A représente le sous-ensemble U. Le symbole "$\surd$" ou "$\times$" dans la colonne B signifie que U est bipartitionnaire ou non. Les autres colonnes sont les valeurs numériques des statistiques (voir le tableau ci-dessous). Si C et D ont la même distribution, on écrit $C \sim D$; dans l'autre cas, on écrit $C \not\sim D$. La *conclusion* est que $B =$ "$\surd$" si et seulement si $C \sim D, E \sim F, G \sim G, I \sim J, K \sim L, M \sim N$ et $O \sim P$ à la fois.

Colonnes	Significations
C D	$(\mathrm{maj}'_U, \mathrm{inv}'_U)$ sur $R(123) = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$
E F	$(\mathrm{maj}'_U, \mathrm{inv}'_U)$ sur $R(122) = \{122, 212, 221\}$
G H	$(\mathrm{maj}'_U, \mathrm{inv}'_U)$ sur $R(133) = \{133, 313, 331\}$
I J	$(\mathrm{maj}'_U, \mathrm{inv}'_U)$ sur $R(322) = \{322, 232, 223\}$
K L	$(\mathrm{maj}'_U, \mathrm{inv}'_U)$ sur $R(112) = \{112, 211, 121\}$
M N	$(\mathrm{maj}'_U, \mathrm{inv}'_U)$ sur $R(113) = \{113, 311, 131\}$
O P	$(\mathrm{maj}'_U, \mathrm{inv}'_U)$ sur $R(332) = \{332, 233, 323\}$

Nous reproduisons ci-après un extrait de la table.

	A	B	C D	E F	G H	I J	K L	M N	O P
	●●●|● ●| ●	$\times$	$333123 \not\sim 333222$	$132 \not\sim 222$	$120 \sim 210$	$132 \not\sim 222$	$333 \sim 333$	$321 \sim 312$	$213 \not\sim 222$
	| ●●| ●	$\times$	$220101 \not\sim 111111$	$201 \not\sim 111$	$000 \sim 000$	$333 \sim 333$	$000 \sim 000$	$000 \sim 000$	$213 \not\sim 222$
	● | ●●| ●	$\times$	$220101 \not\sim 111111$	$201 \not\sim 111$	$000 \sim 000$	$333 \sim 333$	$120 \not\sim 111$	$120 \not\sim 111$	$213 \not\sim 222$
	● | ●●| ●	$\times$	$320121 \not\sim 221121$	$321 \sim 321$	$000 \sim 000$	$333 \sim 333$	$201 \sim 201$	$000 \sim 000$	$213 \not\sim 222$
	●● | ●●| ●	$\times$	$320121 \not\sim 221121$	$321 \sim 321$	$000 \sim 000$	$333 \sim 333$	$321 \sim 312$	$120 \not\sim 111$	$213 \not\sim 222$
	●| ●●| ●	$\times$	$232101 \not\sim 222111$	$201 \not\sim 111$	$120 \sim 210$	$333 \sim 333$	$000 \sim 000$	$201 \sim 201$	$213 \not\sim 222$
	● ●| ●●| ●	$\times$	$232101 \not\sim 222111$	$201 \not\sim 111$	$120 \sim 210$	$333 \sim 333$	$120 \not\sim 111$	$321 \sim 312$	$213 \not\sim 222$
$\rightarrow$	●●| ●●| ●	$\times$	$332121 \sim 332121$	$321 \sim 321$	$120 \sim 210$	$333 \sim 333$	$201 \sim 201$	$201 \sim 201$	$213 \not\sim 222$
	●●●| ●●| ●	$\times$	$332121 \sim 332121$	$321 \sim 321$	$120 \sim 210$	$333 \sim 333$	$321 \sim 312$	$321 \sim 312$	$213 \not\sim 222$
	|●●●| ●	$\times$	$221103 \not\sim 112212$	$213 \sim 123$	$000 \sim 000$	$333 \sim 333$	$012 \sim 021$	$000 \sim 000$	$213 \not\sim 222$
	● |●●●| ●	$\times$	$221103 \not\sim 112212$	$213 \sim 123$	$000 \sim 000$	$333 \sim 333$	$132 \sim 132$	$120 \not\sim 111$	$213 \not\sim 222$
	● |●●●| ●	$\times$	$321123 \not\sim 222222$	$333 \sim 333$	$000 \sim 000$	$333 \sim 333$	$213 \not\sim 222$	$000 \sim 000$	$213 \not\sim 222$
	●● |●●●| ●	$\times$	$321123 \not\sim 222222$	$333 \sim 333$	$000 \sim 000$	$333 \sim 333$	$333 \sim 333$	$120 \not\sim 111$	$213 \not\sim 222$
	●|●●●| ●	$\times$	$233103 \not\sim 223212$	$213 \sim 123$	$120 \sim 210$	$333 \sim 333$	$012 \sim 021$	$201 \sim 201$	$213 \not\sim 222$
	● ●|●●●| ●	$\times$	$233103 \not\sim 223212$	$213 \sim 123$	$120 \sim 210$	$333 \sim 333$	$132 \sim 132$	$321 \sim 312$	$213 \not\sim 222$
	●●|●●●| ●	$\times$	$333123 \not\sim 333222$	$333 \sim 333$	$120 \sim 210$	$333 \sim 333$	$213 \not\sim 222$	$201 \sim 201$	$213 \not\sim 222$
	●●●|●●●| ●	$\times$	$333123 \not\sim 333222$	$333 \sim 333$	$120 \sim 210$	$333 \sim 333$	$333 \sim 333$	$321 \sim 312$	$213 \not\sim 222$
	| |●●	$\surd$	$020211 \sim 010122$	$000 \sim 000$	$012 \sim 012$	$120 \sim 210$	$000 \sim 000$	$012 \sim 021$	$201 \sim 201$
	● | |●●	$\times$	$020211 \sim 010122$	$000 \sim 000$	$012 \sim 012$	$120 \sim 210$	$120 \not\sim 111$	$132 \sim 132$	$201 \sim 201$
	● | |●●	$\surd$	$120231 \sim 120132$	$120 \sim 210$	$012 \sim 012$	$120 \sim 210$	$201 \sim 201$	$012 \sim 021$	$201 \sim 201$
	●● | |●●	$\surd$	$120231 \sim 120132$	$120 \sim 210$	$012 \sim 012$	$120 \sim 210$	$321 \sim 312$	$132 \sim 132$	$201 \sim 201$
	●| |●●	$\times$	$032211 \not\sim 121122$	$000 \sim 000$	$132 \not\sim 222$	$120 \sim 210$	$000 \sim 000$	$213 \not\sim 222$	$201 \sim 201$

BIBLIOGRAPHIE

[CF1] R. J. Clarke et D. Foata. — Eulerian Calculus, I : Univariable Statistics, *Europ. J. Combinatorics*, **15** (1994), pp. 345-362.

[CF2] R. J. Clarke et D. Foata. — Eulerian calculus, II : An extension of Han's fundamental transformation, à paraître dans *Europ. J. Combinatorics*.

[FZ] D. Foata et D. Zeilberger. — Graphical Major Indices, soumis pour publication, 1995.

[H] G.-N. Han. — Ordres bipartitionnaires et statistiques sur les mots, à paraître dans *Electronic J. Combinatorics*, 1995.

I.R.M.A., Université Louis Pasteur & C.N.R.S.
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France
email : guoniu@math.u-strasbg.fr