

UNE NOUVELLE BIJECTION POUR LA STATISTIQUE DE DENERT

GUO-NIU HAN

RÉSUMÉ. — Pour le théorème de Foata-Zeilberger sur les statistiques de Denert, on a construit dans [Han] une bijection indirecte en passant par les chemins évalués. Dans cette Note, on trouvera une bijection définie directement sur le groupe des permutations.

A NEW BIJECTION FOR DENERT'S STATISTIC

ABSTRACT. — A bijection was constructed in [Han] for the Foata-Zeilberger theorem on Denert's statistic. This note provides the construction of another bijection directly defined on the permutation group.

1. Introduction. — Soit $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ une permutation d'ordre n . Si $\sigma(i) > i$, on dit que i est une *place excédante* pour σ et $\sigma(i)$ est une *valeur excédante* pour σ . Soient $\text{Exc}(\sigma) = \sigma(i_1)\sigma(i_2)\cdots\sigma(i_k)$ le sous-mot des valeurs excédantes et $\text{Nexc}(\sigma) = \sigma(j_1)\sigma(j_2)\cdots\sigma(j_{n-k})$ le sous-mot des valeurs non-excédantes. La statistique “exc” est simplement le *nombre des excédances*, i.e., la longueur du mot $\text{Exc}(\sigma)$, et la statistique “den” est définie par (cf. [F-Z], [Den])

$$\text{den}(\sigma) := \Sigma\{i : \sigma(i) > i\} + \text{inv Exc}(\sigma) + \text{inv Nexc}(\sigma),$$

où la statistique “inv” est le *nombre d'inversion*. Par exemple, si

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 5 & 4 & 9 & 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

on a $\text{den}(\sigma) = 1 + 3 + 5 + \text{inv}(759) + \text{inv}(142638) = 13$.

Comme d'habitude, les statistiques “des” et “maj” sont respectivement le *nombre de descentes* et l'*indice majeur* pour les permutations. On dit qu'une statistique bivariée (f, g) définie sur le groupe des permutations d'ordre n a la distribution *euler-mahonienne*, si (f, g) est équidistribuée à la statistique bivariée (des, maj). Dans [F-Z], Foata et Zeilberger ont démontré la conjecture suivante due à Denert :

THÉORÈME 1.1 (FOATA-ZEILBERGER). — *La statistique bivariée (exc, den) a la distribution euler-mahonienne.*

Dans une note précédente [Han] nous avons démontré combinatoirement ce résultat en établissant une bijection Φ entre les mots sous-excédants et les chemins valués. Pour obtenir une bijection définie sur

\mathfrak{S}_n , il fallait encore prendre le produit de composition de Φ par une bijection entre \mathfrak{S}_n et les chemins valués, établi par Foata et Zeilberger [F-Z]. La bijection proposée dans cette note est une bijection *directe* sur \mathfrak{S}_n .

Pour établir *combinatoirement* qu'une paire de statistiques (f, g) définie sur \mathfrak{S}_n est euler-mahonienne, il suffit de construire une bijection $\Psi : (\sigma, s) \mapsto \pi$ de $\mathfrak{S}_{n-1} \times [0, n-1]$ sur \mathfrak{S}_n ayant les propriétés suivantes (cf. [Car], [Han], [Raw]) :

$$g(\pi) = g(\sigma) + s;$$

$$f(\pi) = \begin{cases} f(\sigma), & \text{si } 0 \leq s \leq f(\sigma), \\ f(\sigma) + 1, & \text{si } f(\sigma) + 1 \leq s \leq n-1. \end{cases}$$

C'est la construction d'une telle bijection Ψ que nous allons décrire ici.

2. La Bijection. — Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$. On fait correspondre d'abord une permutation $\nu \in \mathfrak{S}_{n-1}$, appelée *numérotation* de σ , de la façon suivante :

$$\nu(r) := \begin{cases} \#\{i \geq r : i \in \text{Exc}(\sigma)\}, & \text{si } r \in \text{Exc}(\sigma); \\ \#\{i \leq r : i \in \text{Nexc}(\sigma)\} + \text{exc}(\sigma), & \text{si } r \in \text{Nexc}(\sigma). \end{cases}$$

En reprenant l'exemple de la section 1, on peut représenter σ et sa numérotation ν par les trois lignes suivantes :

place – ligne	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valeur – ligne	7	1	5	4	9	2	6	3	8
numéro-ligne	2	4	3	7	1	5	8	6	9

Soit $0 \leq s \leq n-1$. Si $s = 0$, on définit $\Psi(\sigma, 0) := \sigma(1)\sigma(2) \cdots \sigma(n-1)n$. Si $s \neq 0$, on construit la permutation $\Psi(\sigma, s)$ de la façon suivante :

[B1].— Dans la valeur-ligne, on souligne $\sigma(i)$ s'il est une valeur excédante et si $\sigma(i) \geq \nu^{-1}(s)$. L'ensemble de toutes les valeurs soulignées $\{\nu^{-1}(1), \nu^{-1}(2), \dots, \nu^{-1}(k)\}$ est noté $\text{Soul}(\sigma)$.

[B2].— On remplace les valeurs soulignées de grande à petite en commençant par n et en sortant la plus petite valeur soulignée $p := \nu^{-1}(k)$, d'où une suite de remplacement

$$n = \nu^{-1}(0) \mapsto \nu^{-1}(1) \mapsto \nu^{-1}(2) \mapsto \cdots \mapsto \nu^{-1}(k) = p,$$

où par convention, $\nu(n) = 0$. Ainsi, on a

$$(2.1) \quad \{p > \sigma(i) \geq \nu^{-1}(s), \sigma(i) > i\} = \emptyset.$$

[B3].— On insère p à la place $\nu^{-1}(s)$ qui est appelée la *place d'insertion* par rapport à π , et on ajoute n à la fin de la place-ligne.

Autrement dit, la permutation $\pi := \Psi(\sigma, s)$ est définie comme suit :

- a) $\pi(i) := \sigma(i)$ si $i < \nu^{-1}(s)$ et $\sigma(i) \notin \text{Soul}(\sigma)$;
- b) $\pi(i+1) := \sigma(i)$ si $i \geq \nu^{-1}(s)$ et $\sigma(i) \notin \text{Soul}(\sigma)$;
- c) $\pi(i) := \nu^{-1}(l-1)$ si $i < \nu^{-1}(s)$ et $\sigma(i) = \nu^{-1}(l) \in \text{Soul}(\sigma)$;
- d) $\pi(i+1) := \nu^{-1}(l-1)$ si $i \geq \nu^{-1}(s)$ et $\sigma(i) = \nu^{-1}(l) \in \text{Soul}(\sigma)$;
- e) $\pi(\nu^{-1}(s)) = \nu^{-1}(k)$.

Dans le tableau suivant, on donne deux exemples pour illustrer la construction de l'image $\Psi(\sigma, s)$.

	s=2	s=7
[B1]	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \underline{7} & 1 & 5 & 4 & \underline{9} & 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ $\nu^{-1}(2) = 7$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \underline{7} & 1 & \underline{5} & 4 & \underline{9} & 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ $\nu^{-1}(7) = 4$
[B2]	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \underline{9} & 1 & 5 & 4 & \underline{10} & 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ $10 \mapsto 9 \mapsto 7 = p$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \underline{9} & 1 & \underline{7} & 4 & \underline{10} & 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ $10 \mapsto 9 \mapsto 7 \mapsto 5 = p$
[B3]	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 10 & 2 & 7 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 7 & 5 & 4 & 10 & 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$
	$\Psi(\sigma, 2)$	$\Psi(\sigma, 7)$

LEMME 2.1 (DUMONT [Dum]).— Soit σ une permutation d'ordre n et v un entier. On a

$$\#\{i \geq v > \sigma(i)\} = \#\{\sigma(i) \geq v > i\}.$$

Démonstration. — En effet,

$$m.g. + \#\{i \geq v, v \leq \sigma(i)\} = \#\{i \geq v\},$$

$$m.d. + \#\{i \geq v, v \leq \sigma(i)\} = \#\{\sigma(i) \geq v\}.$$

D'où le lemme. \square

PROPOSITION 2.2.— Posons $\pi = \Psi(\sigma, s)$. On a

$$(2.2) \quad \text{den}(\pi) = \text{den}(\sigma) + s ;$$

$$(2.3) \quad \text{exc}(\pi) = \begin{cases} \text{exc}(\sigma) , & \text{si } 0 \leq s \leq \text{exc}(\sigma) , \\ \text{exc}(\sigma) + 1 , & \text{si } \text{exc}(\sigma) + 1 \leq s \leq n - 1 . \end{cases}$$

Démonstration. — Comme on le verra, la démonstration de (2.3) est incluse dans celle de (2.2); il nous suffit donc de démontrer la première partie de la proposition. On distingue deux cas suivant que $s \leq \text{exc}(\sigma)$ ou $s \geq \text{exc}(\sigma) + 1$.

Premier cas. — Supposons $0 \leq s \leq \text{exc}(\sigma)$. La propriété (2.3) est banale pour $s = 0$. Si $s \geq 1$ (cf. le premier exemple), on a $p = \nu^{-1}(s)$, d'où la place $\nu^{-1}(s)$ est non-excédante. Pour tout $i < \nu^{-1}(s)$ (resp. $i > \nu^{-1}(s)$), i est une place excédante pour π , si et seulement si i (resp. $i - 1$) est une place excédante pour σ . On a donc

$$(2.4) \quad \Sigma\{i : \pi(i) > i\} - \Sigma\{i : \sigma(i) > i\} = \#\{\sigma(i) > i \geq \nu^{-1}(s)\};$$

$$(2.5) \quad \text{inv Exc}(\pi) - \text{inv Exc}(\sigma) = 0;$$

$$(2.6) \quad \text{inv Nexc}(\pi) - \text{inv Nexc}(\sigma) = \#\{i \geq \nu^{-1}(s) > \sigma(i)\} \\ = \#\{\sigma(i) \geq \nu^{-1}(s) > i\},$$

d'après le lemme précédent. Par définition de "den", on a

$$\text{den}(\pi) - \text{den}(\sigma) = \#\{\sigma(i) > i \geq \nu^{-1}(s)\} + \#\{\sigma(i) \geq \nu^{-1}(s) > i\} \\ = \#\{\sigma(i) \geq \nu^{-1}(s), \sigma(i) > i\} \\ = s.$$

Second cas. — Supposons $\text{exc}(\sigma) \leq s \leq n - 1$ (cf. le deuxième exemple), on peut vérifier que $p > \nu^{-1}(s)$, d'où la place $\nu^{-1}(s)$ est excédante. De même, On a

$$(2.4') \quad \Sigma\{i : \pi(i) > i\} - \Sigma\{i : \sigma(i) > i\} \\ = \#\{\sigma(i) > i \geq \nu^{-1}(s)\} + \nu^{-1}(s);$$

$$(2.5') \quad \text{inv Exc}(\pi) - \text{inv Exc}(\sigma) = \#\{\nu^{-1}(s) > i, \sigma(i) > i, \sigma(i) \geq p\};$$

$$(2.6') \quad \text{inv Nexc}(\pi) - \text{inv Nexc}(\sigma) = 0.$$

D'autre part,

$$\nu^{-1}(s) = \#\{\sigma(i) \leq \nu^{-1}(s), i \geq \sigma(i)\} + \#\{\nu^{-1}(s) \geq \sigma(i) > i\} \\ = s - \text{exc}(\sigma) + \#\{p > \sigma(i) > i, \nu^{-1}(s) > i\},$$

où la première partie de la dernière égalité provient de la définition de la numérotation ν et la seconde de la relation (2.1). Avec

$$\#\{\sigma(i) > i \geq \nu^{-1}(s)\} + \#\{\nu^{-1}(s) > i, \sigma(i) > i, \sigma(i) \geq p\} \\ + \#\{p > \sigma(i) > i, \nu^{-1}(s) > i\} \\ = \#\{\sigma(i) > i \geq \nu^{-1}(s)\} + \#\{\sigma(i) > i, \nu^{-1}(s) > i\} \\ = \#\{\sigma(i) > i\} \\ = \text{exc}(\sigma),$$

on a enfin

$$\begin{aligned} & \text{den}(\pi) - \text{den}(\sigma) \\ &= \nu^{-1}(s) + \#\{\sigma(i) > i \geq \nu^{-1}(s)\} + \#\{\nu^{-1}(s) > i, \sigma(i) > i, \sigma(i) \geq p\} \\ &= s. \quad \square \end{aligned}$$

La propriété (2.1) nous suggère de définir la *place grande-fixe* d'une permutation π , comme étant une place j , qui soit une place fixe, ou qui satisfasse la propriété :

$$E_j = \{\pi(i) : \pi(i) > i, \pi(j) > \pi(i) \geq j\} = \emptyset.$$

LEMME 2.3.— Soit $\pi = \Psi(\sigma, s)$ une permutation d'ordre n . Alors

[G1].— La place d'insertion $\nu^{-1}(s)$ est une place grande-fixe ;

[G2].— Tout $j > \nu^{-1}(s)$ n'est pas une place grande-fixe.

Démonstration.— Soit $j > \nu^{-1}(s)$. Comme j n'est pas une place fixe, il suffit de considérer le cas où j est une place excédante. Dans ce cas, on a $j > p$ (cf. [B2]). En écrivant $\pi(j) = \nu^{-1}(k)$, on peut vérifier que $\nu^{-1}(k+1) \in E_j$. D'où [G2]. \square

PROPOSITION. 2.4.— L'application Ψ ainsi construite est inversible.

Démonstration.— Soit π une permutation. Notons $G(\pi)$ l'ensemble des places grandes-fixes. Ou bien $\text{exc}(\pi) = 0$ et alors toutes les places sont grandes-fixes, ou bien $\text{exc}(\pi) \neq 0$; dans ce cas, on note i l'entier défini par $\pi(i) = \min \text{Exc}(\pi)$. Il appartient évidemment à $G(\pi)$. On peut alors faire l'inverse de la procédure [B*] en prenant $\max G(\pi)$ comme la place d'insertion. \square

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Car] L. CARLITZ. — q -Bernoulli and Eulerian numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76** (1954), pp. 332-350.
- [Den] M. DENERT. — The genus zeta function of hereditary orders in central simple algebras over global fields, preprint.
- [Dum] D. DUMONT. — Interprétations Combinatoires des nombres de Genocchi, *Duke Math.J.*, **41** (1974), pp. 305-317.
- [F-Z] D. FOATA ET D. ZEILBERGER. — Denert's Permutation Statistic Is Indeed Euler-Mahonian, *Studies in Appl. Math.*, à paraître.
- [Han] G.-N. HAN. — Distribution Euler-Mahonienne : une correspondance, *C.R. Acad. Sc. Paris*, à paraître.
- [Raw] D. RAWLINGS. — Generalized Worpitzki Identities with Applications to Permutation Enumeration, *Europ.J.Comb.*, **2** (1981), pp. 67-78.

*Département de Mathématique
7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg*