

ÉPREUVE 3 : UE PROBABILITÉS ET STATISTIQUE
 Solution

Exercice 1 :

1. La densité de X est donnée par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

En utilisant l'indépendance entre X et Y , la densité du couple (X, Y) est le produit des densités donc

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \mathbb{1}_{\{x \geq 0, y \geq 0\}}.$$

2. On transforme le couple initial (X, Y) en un couple $(U = X, V = X + Y)$. Le changement inverse revient à transformer (U, V) en un couple $(X, Y) = (U, V - U)$. Le jacobien vaut donc 1. Par la formule de changement de variables on obtient

$$f_{(X,X+Y)}(u, v) = f_{(X,Y)}(u, v - u) |1| = \lambda^2 e^{-\lambda v} \mathbb{1}_{\{0 \leq u \leq v\}}.$$

3. On obtient la densité marginale de $X + Y$ en intégrant la loi du couple par rapport à u :

$$f_{X+Y}(v) = \int f_{(X,X+Y)}(u, v) du = \lambda^2 v e^{-\lambda v} \mathbb{1}_{\{v \geq 0\}}.$$

4. On cherche l'espérance de $Z = X + Y$ dont la densité est donnée dans la question précédente. Par définition de l'espérance et par intégration par parties, on en déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \int z f_Z(z) dz = \lambda^2 \int_0^\infty z^2 e^{-\lambda z} dz = \lambda^2 \left\{ \left[z^2 \frac{e^{-\lambda z}}{-\lambda} \right]_0^\infty + \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty z e^{-\lambda z} dz \right\} \\ &= 2\lambda \int_0^\infty z e^{-\lambda z} dz = 2\lambda \left\{ \left[z \frac{e^{-\lambda z}}{-\lambda} \right]_0^\infty + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda z} dz \right\} = \frac{2}{\lambda}. \end{aligned}$$

5. Les variables X et Y ont même loi, la loi exponentielle de paramètre λ donc

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left\{ \left[x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^\infty + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \right\} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Exercice 2 :

1. Pour une loi de Poisson(1), on a

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-1}}{k!}, k = 0, 1, \dots$$

2. En utilisant l'indépendance des X_i

$$G_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \mathbb{E} \left(t^{\sum_{i=1}^n X_i} \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(t^{X_i}) = \prod_{i=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathbb{P}(X_i = k) = \prod_{i=1}^n e^{t-1} = e^{(t-1)n}$$

et par conséquent on en déduit que $\sum_{i=1}^n X_i$ est de loi de Poisson de paramètre n .

3. On dit que X_n converge en probabilité vers X si $\forall \epsilon > 0$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

4. Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et de même loi, de carré intégrable, donc on peut appliquer la loi faible des grands nombres qui dit que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1) = 1.$$

5. On veut montrer une convergence en probabilité, donc on repart naturellement de la définition. On utilise ensuite l'inégalité de Tchébychev : $\forall \epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - 1 \right| \geq \epsilon \right) \leq \frac{\text{Var}(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i)}{\epsilon^2} = \frac{\text{Var}(X_1)}{n\epsilon^2} = \frac{1}{n\epsilon^2}$$

par indépendance des X_i . Le membre de droite de l'inégalité converge vers 0, donc on a démontré le résultat.

6. Théorème Central Limite : Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et de même loi, de carré intégrable. Alors

$$\frac{\sqrt{n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

7. Dans le cas particulier d'une variable de loi de Poisson(1), on a $\mathbb{E}(X) = \text{Var}(X) = 1$. Donc

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - 1 \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Par conséquent

$$\mathbb{P} \left(\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - 1 \right) \leq t \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N \leq t),$$

où N est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Or

$$\mathbb{P} \left(\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - 1 \right) \leq t \right) = \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq n + t\sqrt{n} \right)$$

et donc en faisant $t = 0$ on en déduit que

$$\mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n X_i \leq n \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N \leq 0) = \frac{1}{2}$$

par symétrie.

Exercice 3 :

1. X et Y sont indépendantes donc

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0.$$

2. On a $X \in \{0, 1\}, Y \in \{0, 1\}$. Donc $X + Y \in \{0, 1, 2\}$. De plus par indépendance

$$\mathbb{P}(X + Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = (1 - p)^2;$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X + Y = 1) &= \mathbb{P}(\{X = 1, Y = 0\} \text{ ou } \{X = 0, Y = 1\}) = \mathbb{P}(\{X = 1, Y = 0\}) + \mathbb{P}(\{X = 0, Y = 1\}) \\ &= 2p(1 - p); \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X + Y = 2) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = p^2.$$

On vérifie bien que la somme des probabilités fait 1.

3. On a $X \in \{0, 1\}, Y \in \{0, 1\}$. Donc $X - Y \in \{-1, 0, 1\}$. De plus par indépendance

$$\mathbb{P}(X - Y = -1) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 1) = p(1 - p);$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X - Y = 0) &= \mathbb{P}(\{X = 1, Y = 1\} \text{ ou } \{X = 0, Y = 0\}) = \mathbb{P}(\{X = 1, Y = 1\}) + \mathbb{P}(\{X = 0, Y = 0\}) \\ &= p^2 + (1 - p)^2; \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X - Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 0) = p(1 - p).$$

On vérifie bien que la somme des probabilités fait 1.

4. Les seuls cas possibles sont

$$\mathbb{P}(X + Y = 2, X - Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = p^2;$$

$$\mathbb{P}(X + Y = 1, X - Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = p(1 - p);$$

$$\mathbb{P}(X + Y = 1, X - Y = -1) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = p(1 - p);$$

$$\mathbb{P}(X + Y = 0, X - Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = (1 - p)^2.$$

On vérifie bien que la somme des probabilités fait 1.

On voit clairement d'après les questions 2., 3. et 4. que

$$\mathbb{P}(X + Y = k, X - Y = k') \neq \mathbb{P}(X + Y = k)\mathbb{P}(X - Y = k').$$

Par conséquent $X + Y$ et $X - Y$ ne sont pas indépendantes.

5. Par linéarité de la covariance, on a

$$\text{Cov}(X+Y, X-Y) = \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, X) - \text{Cov}(Y, Y) = \text{Var}(X) - \text{Var}(Y) = 0.$$

6. On peut donc conclure de cet exercice que covariance égale à 0 n'implique pas indépendance.