# CONNEXITÉ ET DENSITÉ DES REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES DES GROUPES DE SURFACE DANS LE GROUPE GÉNÉRAL LINÉAIRE

OLIVIER GUICHARD

ABSTRACT. We show that any representation of the fundamental group of an orientable surface $\Sigma$ in $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ admits a base of neighborhoods in any of which the subset of irreducible representations is a pathwise connected and dense subset, as long as the genus of $\Sigma$ is big enough.

## INTRODUCTION

Let $\Gamma_g$ denote the fundamental group of a compact orientable surface of genus $g$. This group admits the following well known presentation

$$\Gamma_g = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle.$$

We establish density and connectedness properties of the subset $\mathrm{Hom}^{\mathrm{irr}}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ of irreducible representations in the space of representations $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$.

**Theorem 1.** *Let $n$ be a integer. If the genus $g$ is large enough (depending on $n$) then, for every representation $\rho$ in $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$, there exists a base $(U_\alpha)_\alpha$ of neighborhoods of $\rho$ in $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ such that the intersection $U_\alpha \cap \mathrm{Hom}^{\mathrm{irr}}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ is* dense *in $U_\alpha$, and* pathwise connected*.*

*Remarks.*

- The proof implies similar statements for the groups $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{PGL}_n(\mathbf{R})$ and $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$.
- The methods of proof give moreover an explicit minoration for the genus: $g$ bigger than $n^2 + 1$ is sufficient (probably not optimal).
- In the following we will focus particularly to the case when the representation $\rho$ is semisimple. Under this hypothesis we obtain a precise description of the singularity of the space $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ at $\rho$ (Proposition 8 and 9). In paragraph 6.10 we explain the case of any representation.
- Theorem 21 gives, although under stronger hypothesis, a stronger conclusion than Theorem 1, that is, the connectedness and the density of the set of representations whose restriction to a given finite index subgroup is irreducible.
- The set $\mathrm{Hom}^{\mathrm{irr}}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ is always open. Its complement is in fact nowhere dense and of measure zero, this is easily obtained from the Proposition 8 and 9.

We begin by giving some consequences of this result that are easy but more instructive corollaries.

**Corollary 2.** *If the genus $g$ is large enough, then, for every connected component $\mathcal{C}$ of* $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$*, the subset* $\mathcal{C} \cap \mathrm{Hom}^{\mathrm{irr}}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ *is dense in* $\mathcal{C}$ *and pathwise connected.*

The space $\mathrm{Hom}^{\mathrm{irr}}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ has then the same number of connected components as $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$. In [5] Bradlow, García-Prada and Gothen show that this number is $3 \cdot 2^{2g}$. Also, $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ is the set of real points of an algebraic variety and it is known that a representation $\rho$ is a smooth point if and only if the centralizer of $\rho(\Gamma_g)$ is a finite extension of the group $\mathbf{R}^*$ of scalar matrices, *i.e.* if, and only if, the Lie algebra of this centralizer equals the scalar matrices (see Proposition 1.2 of [8], we will go back to this point in the remark following Theorem 6). For an irreducible representation this condition is always satisfied.

**Corollary 3.** *If the genus $g$ is large enough, then, in any connected component of the space of representations* $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$*, the set of smooth points is dense and pathwise connected.*

In the frame of real algebraic varieties the property of connectedness of smooth points is not immediate (consider for example the cone defined by a quadratic form of signature $(n, 1)$).

It is natural to consider the quotient space $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))/\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ where the action of $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ is by conjugation. This quotient with the quotient topology is not Hausdorff, but if we identify two points having the same neighborhoods, we obtain a topological space $M$ which has moreover the structure of an analytic variety ($M$ is also the set of classes of representations of $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ having the same semisimplification). The above corollaries show that the set of smooth points in any connected component of $M$ is still pathwise connected.

We remark that the techniques used here apply also to the group $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ and that we hence have similar results for this group. Although, for complex groups, there is a more direct way to conclude. Indeed, let $G$ be a connected semisimple complex Lie group. The obstruction to lift a representation $\rho$ of $\Gamma_g$ into $G$ to a representation $\tilde{\rho}$ with values in the universal cover $\widetilde{G}$ is given by an element

$$\sigma(\rho) \in H^2(\Gamma_g, \pi_1(G)) \simeq \pi_1(G).$$

This element of $\pi_1(G)$ can be described using the presentation of $\Gamma_g$ (see [15]). Let $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{b}_g$ be elements of $\widetilde{G}$ which project to $\rho(a_1), \ldots, \rho(b_g)$, then

$$\sigma(\rho) = \tilde{a}_1 \tilde{b}_1 \tilde{a}_1^{-1} \tilde{b}_1^{-1} \cdots \tilde{a}_g \tilde{b}_g \tilde{a}_g^{-1} \tilde{b}_g^{-1} \in \ker(\widetilde{G} \to G) = \pi_1(G).$$

**Theorem.** *(Jun Li [13]) The irreducible components of* $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, G)$ *are the fibers of the map* $\sigma : \mathrm{Hom}(\Gamma_g, G) \to \pi_1(G)$.

Note that this proves the irreducibility of $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, G)$ when $G$ is simply connected, another proof of the irreducibility for the case $G = \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ and related results can be found in [17]. Moreover the map $\sigma$ is locally constant, which proves that in this case the connected components of $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, G)$ coincide with the irreducible components. It is also a classical fact that the set of smooth points of a complex analytic irreducible variety is dense and pathwise connected (section I.4 in [23]). Hence, in each connected component of $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, G)$, the set of smooths points is dense and pathwise connected. By exploiting the simpler local structure of $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, G)$ at a smooth point, density and connectedness of irreducible representations can easily be deduced. Indeed a neighborhood of such a point is analytically isomorphic to an open set of $\mathbf{C}^N$ and the subset of non-irreducible representations is the finite union of analytic subvarieties of positive codimension (see the remark following the lemma 4), the complement in $\mathbf{C}^N$ of such a union is pathwise connected.

Another situation where similar results are already known is the case of $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$. In the article [9], W. Goldman shows the density and properties of connectedness of some particular representations. Once given a pair-of-pants decomposition of the surface $\Sigma$ of genus $g$ (a pair of pants is a sphere minus three discs)

$$\Sigma = M_1 \cup \cdots \cup M_{2g-2}$$

satisfying that the dual graph of this decomposition is a tree, he proves :

**Theorem.** *(Goldman [9]) In any connected component $\mathcal{C}$ of $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R}))$, the subset of the representations*

$$\{\rho \in \mathcal{C} \mid \rho(\pi_1(M_i)) \text{ nonabelian } \forall i\}$$

*is dense in $\mathcal{C}$ and is pathwise connected.*

This statement does not appear just as it is in Goldman's paper, but is one of the tools used to determine the connected components of $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R}))$. It implies that the subset of smooth points is dense and pathwise connected in each connected component and also that the subset of irreducible representations satisfies the same properties.

To end this introduction we give a counter-example to a generalization to other Lie groups. Let $\iota : \Gamma_g \hookrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ a one-to-one map onto a cocompact lattice. The group $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ can be identified with $\mathrm{SU}(1,1)$ which can be seen as a subgroup of $\mathrm{PU}(2,1)$, call $\rho$ the obtained representation of $\Gamma_g$ in $\mathrm{PU}(2,1)$. A result of D. Toledo [22] states that, in this case, the deformations of $\rho$ always preserve a line in $\mathbf{C}^3$, they are therefore never irreducible. The theorem 1 hence does not generalize to the group $\mathrm{PU}(2,1)$. We will also give an example showing that an hypothesis on the genus is necessary.

## Introduction

Dans ce texte le groupe fondamental d'une surface compacte orientable de genre $g > 1$ sera noté $\Gamma_g$. Il admet la présentation classique suivante

$$\Gamma_g = \langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle.$$

Nous proposons ici de montrer des propriétés de densité et de connexité du sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ des représentations irréductibles, désigné par $\mathrm{Hom}^{\mathrm{irr}}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$.

**Théorème 1.** *Soit $n$ un entier fixé. Si $g$ est assez grand (en fonction de $n$) alors, pour toute représentation $\rho$ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$, il existe une base $(U_\alpha)_\alpha$ de voisinages de $\rho$ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ telle que l'intersection $U_\alpha \cap \mathrm{Hom}^{\mathrm{irr}}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ soit* dense *dans $U_\alpha$ et soit* connexe par arcs.

*Remarques.* – En fait ce théorème et la démarche utilisée impliquent des énoncés similaires pour les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{PGL}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$.

- Les méthodes employées donnent une estimation explicite pour le genre, $g$ plus grand que $n^2+1$ suffit.
- Dans la suite nous nous concentrerons particulièrement sur le cas où la représentation $\rho$ est semi-simple. Précisément c'est sous cette hypothèse que l'on obtiendra la description explicite de la singularité en $\rho$ de l'espace $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ (propositions 8 et 9). Le paragraphe 6.10 explique le cas d'une représentation quelconque.
- Le théorème 21 donne une amélioration du théorème précédent, à savoir la connexité et la densité des représentations dont la restriction à un sous-groupe d'indice fini —fixé lui aussi— est irréductible, cependant sous des hypothèses plus fortes.
- L'ensemble considéré $\mathrm{Hom}^{\mathrm{irr}}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ est automatiquement ouvert. Son complémentaire est en fait nulle part dense et de mesure nulle, ceci s'obtient facilement des propositions intermédiaires 8 et 9.

Commençons par donner quelques conséquences de ce résultat qui sont des implications faciles mais plus significatives.

**Corollaire 2.** *Si le genre $g$ est assez grand, alors, pour chaque composante connexe $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$, le sous-ensemble $\mathcal{C} \cap \mathrm{Hom}^{\mathrm{irr}}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ est dense dans $\mathcal{C}$ et est connexe par arcs.*

Autrement dit, $\mathrm{Hom}^{\mathrm{irr}}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ a le même nombre de composantes connexes que $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$. Dans [5] Bradlow, García-Prada et Gothen démontrent qu'il y en a $3 \cdot 2^{2g}$. Aussi $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ est l'ensemble des points réels d'une variété algébrique et il est connu qu'une représentation $\rho$ est un point lisse si, et seulement si, le centralisateur de $\rho(\Gamma_g)$ est une extension finie du groupe $\mathbf{R}^*$ des matrices scalaires, *i.e.* si, et seulement si, l'algèbre de Lie de ce centralisateur est égale aux matrices scalaires (voir la proposition 1.2 de [8], nous reverrons aussi ce point dans la remarque suivant le théorème 6). Or, pour une représentation irréductible, cette dernière condition est toujours vérifiée.

**Corollaire 3.** *Si le genre $g$ est assez grand, alors, dans chaque composante connexe de $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$, l'ensemble des points lisses est dense et connexe par arcs.*

Dans le cadre des variétés algébriques réelles cette propriété de connexité des points lisses n'est pas automatique (prendre par exemple le cône quadratique défini par une forme de signature $(n,1)$).

Il est naturel de considérer l'espace quotient $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))/\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ où le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ agit par conjugaison. Ce quotient muni de la topologie quotient n'est pas séparé, mais si on identifie les points qui ont les mêmes voisinages, on obtient un espace topologique $M$ qui a également une structure de variété analytique ($M$ est aussi l'ensemble des classes d'équivalences de représentations ayant même semi-simplification). Les corollaires ci-dessus montrent également que l'ensemble des points lisses d'une composante connexe de $M$ est encore connexe par arcs.

Notons que les techniques utilisées ici s'appliquent telles quelles au groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et nous avons donc les mêmes types de résultats pour ce groupe. Cependant, pour les groupes complexes, il se trouve qu'il y a une manière plus directe de conclure. En effet, soit $G$ un groupe de Lie complexe semi-simple connexe. L'obstruction à relever une représentation $\rho$ de $\Gamma_g$ dans $G$ en une représentation $\tilde{\rho}$ à valeurs dans le revêtement universel $\widetilde{G}$ définit un élément

$$\sigma(\rho) \in H^2(\Gamma_g, \pi_1(G)) \simeq \pi_1(G).$$

Ici, cet élément de $\pi_1(G)$ peut être décrit grâce à la présentation de $\Gamma_g$ (voir [15]). Soient $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{b}_g$ des éléments de $\widetilde{G}$ se projettant sur $\rho(a_1), \ldots, \rho(b_g)$, alors

$$\sigma(\rho) = \tilde{a}_1 \tilde{b}_1 \tilde{a}_1^{-1} \tilde{b}_1^{-1} \cdots \tilde{a}_g \tilde{b}_g \tilde{a}_g^{-1} \tilde{b}_g^{-1} \in \ker(\widetilde{G} \to G) = \pi_1(G).$$

**Théorème.** *(Jun Li* [13]*)*
*Les composantes irréductibles de* $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, G)$ *sont les fibres de* $\sigma : \mathrm{Hom}(\Gamma_g, G) \to \pi_1(G)$.

Ceci prouve l'irréducibilité de $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, G)$ lorsque $G$ est simplement connexe, une autre preuve de cette irréducibilité pour $G = \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ peut être trouvée dans [17]. Par ailleurs cette application $\sigma$ est localement constante, ce qui prouve qu'ici les composantes connexes de $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, G)$ coïncident avec les composantes irréductibles. Il est de plus connu que l'ensemble des points lisses d'une variété (analytique) complexe irréductible est dense et est connexe par arcs (section I.4 de [23]). Ainsi, dans chaque composante connexe de $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, G)$, l'ensemble des points lisses est dense et connexe par arcs. En exploitant la structure locale de $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, G)$ en un point lisse qui est plus simple on peut déduire également la densité et la connexité des représentations irréductibles. En effet un voisinage d'un tel point est analytiquement isomorphe à un ouvert de $\mathbf{C}^N$ et l'ensemble des représentations non-irréductibles est la réunion finie de sous-variétés analytiques de codimension supérieure à un (voir la remarque suivant le lemme 4), on sait que le complémentaire d'une telle réunion est connexe par arcs dans $\mathbf{C}^N$.

Une autre situation où des résultats de ce type sont déjà connus est le cas du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$. Dans [9], W. Goldman montre la densité et des propriétés de connexité de certaines représentations particulières. Il se donne un découpage en pantalons de la surface $\Sigma$ de genre $g$ (un pantalon est une sphère privée de trois disques)

$$\Sigma = M_1 \cup \cdots \cup M_{2g-2}$$

qui vérifie que le graphe dual de ce découpage est un arbre.

**Théorème.** *(Goldman* [9]*) Dans toute composante connexe* $\mathcal{C}$ *de* $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R}))$*, l'ensemble des représentations*

$$\{\rho \in \mathcal{C} \mid \rho(\pi_1(M_i)) \text{ non-abélien } \forall i\}$$

*est dense dans* $\mathcal{C}$ *et est connexe par arcs.*

Cet énoncé ne se trouve pas tel quel dans l'article cité, mais est l'un des outils utilisés pour déterminer justement les composantes connexes de $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R}))$. Il implique que l'ensemble des points lisses est dense et connexe par arcs dans chaque composante connexe et donc qu'aussi l'ensemble des représentations irréductibles satisfait les mêmes propriétés par un raisonnement analogue au cas des groupes complexes.

Terminons par une sorte de contre-exemple. Soit $\iota : \Gamma_g \hookrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ une injection d'image un réseau cocompact. Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ s'identifie au groupe $\mathrm{SU}(1,1)$ qui se plonge dans $\mathrm{PU}(2,1)$, appelons $\rho$ la représentation de $\Gamma_g$ dans $\mathrm{PU}(2,1)$. Un résultat de D. Toledo [22] affirme que, dans ce cas, les déformations de $\rho$ préservent toujours une droite dans $\mathbf{C}^3$, elles ne sont donc jamais irréductibles. Le théorème 1 ne se généralise donc pas au groupe $\mathrm{PU}(2,1)$. Nous donnerons aussi un exemple montrant qu'une hypothèse sur le genre est nécessaire.

## 1. Lemmes initiaux et organisation du texte

Nous commençons par quelques remarques simples sur les représentations irréductibles et détaillons rapidement la démonstration du théorème.

1.1. **Représentations irréductibles.** Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des paraboliques maximaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, l'ensemble des représentations irréductibles est alors

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{irr}}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})) = \mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})) - \bigcup_{P\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}(\Gamma_g, P).$$

De plus, dans le voisinage d'une représentation donnée $\rho$, les seuls paraboliques pouvant intervenir sont ceux qui sont « proches » d'un parabolique contenant $\rho(\Gamma_g)$.

**Lemme 4.** *Pour tout voisinage $U_e$ de l'identité dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et pour toute représentation $\rho$, il existe un voisinage $U_\rho$ de $\rho$ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ tel que*

$$U_\rho \cap \mathrm{Hom}^{\mathrm{irr}}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})) = U_\rho - \bigcup_{P\in\mathcal{P}, \rho(\Gamma_g)\subset P} U_e \cdot \mathrm{Hom}(\Gamma_g, P),$$

*où $\cdot$ désigne l'action de $G$ par conjugaison, c'est-à-dire $U_e \cdot \mathrm{Hom}(\Gamma_g, P) = \{g\cdot\rho : \gamma \mapsto g\rho(\gamma)g^{-1} \mid g \in U_e,\ \rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma_g, P)\}$.*

**Démonstration** : On sait que l'ensemble des paraboliques maximaux se décompose en un nombre fini de classes $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ par conjugaison. Pour tout $\alpha$, notons $P_\alpha$ un sous-groupe parabolique de $G$ représentant la classe de conjugaison $C_\alpha$. Comme $P_\alpha$ est son propre normalisateur, l'ensemble $C_\alpha$ s'identifie au quotient $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})/P_\alpha$. Muni de la topologie quotient, $C_\alpha$ est un espace compact.

Pour tout $\alpha$, notons $F_\alpha = {C_\alpha}^{\rho(\Gamma_g)}$ l'ensemble des points fixes de $\rho(\Gamma_g)$ dans $C_\alpha$. Un parabolique maximal $P$ appartient alors à $F_\alpha$ si, et seulement si, $P$ appartient à $C_\alpha$ et $\rho(\Gamma_g)$ est contenu dans $P$.

Le complémentaire $L_\alpha$ de $U_e \cdot F_\alpha$ dans $C_\alpha$ est compact. Pour tout $\alpha$, $\rho(\Gamma_g)$ n'a pas de points fixes dans $L_\alpha$.

On en déduit l'existence d'un voisinage $U_\rho$ de $\rho$ tel que, pour tout $\rho'$ dans $U_\rho$, $\rho'(\Gamma_g)$ n'a pas de points fixes dans $L_\alpha$, ce qui implique le résultat cherché. □

*Remarques.* – Ce lemme n'est ni spécifique au groupe réductif $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, ni au groupe de type fini $\Gamma_g$.

– Le raisonnement montre également que le complémentaire des représentations irréductibles est la réunion finie $\cup \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cdot \mathrm{Hom}(\Gamma_g, P_\alpha)$ et est donc (l'image d')une réunion finie de variétés analytiques.

On peut préciser un peu plus ce résultat lorsque la représentation $\rho$ est semi-simple. La composante neutre $Z(\rho)^0$ du centralisateur de $\rho(\Gamma_g)$ est alors un groupe réductif. On fixera aussi un compact maximal $K$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ tel que $K \cap Z(\rho)^0$ est un compact maximal de $Z(\rho)^0$. Dans ce cas les paraboliques maximaux contenant $\rho(\Gamma_g)$ se divisent en un nombre fini de classes pour l'action par conjugaison de $K \cap Z(\rho)^0$ (voir la démonstration de la proposition 8).

**Lemme 5.** *Soit $\rho$ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ une représentation semi-simple, $Z(\rho)^0$ la composante neutre du centralisateur de $\rho(\Gamma_g)$. Notons $P_1, \ldots, P_k$ des représentants des classes de paraboliques maximaux contenant $\rho(\Gamma_g)$ pour l'action par conjugaison de $L = K \cap Z(\rho)^0$.*

*Alors, pour tout voisinage $U_e$ de l'identité dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, il existe un voisinage $U_\rho$ de $\rho$ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$, tel que*

$$U_\rho \cap \mathrm{Hom}^{\mathrm{irr}}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})) = U_\rho - \bigcup_i (U_e L) \cdot \mathrm{Hom}(\Gamma_g, P_i).$$

1.2. **Plan.** La démonstration du théorème repose sur la description de la singularité de $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ au voisinage d'une représentation semi-simple. Les travaux de Goldman et Millson ([10]) et ceux de Simpson ([20]) montrent que cette singularité est quadratique et en donnent des équations. Nous prendrons soin de garder la trace des paraboliques dans ces équations. En particulier on obtiendra que si $\rho$ est semi-simple et $\rho(\Gamma_g)$ est inclus dans un parabolique $P$, alors la singularité de $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, P)$ en $\rho$ est quadratique.

Précisément un voisinage de $\rho$ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, G)$ est analytiquement équivalent à un cône défini par des équations quadratiques homogènes et les représentations de ce voisinage dont l'image est incluse dans un parabolique sont, dans ce cône, celles qui appartiennent de plus à la réunion de certains espaces vectoriels (proposition 8 et 9). Un calcul explicite permettra alors de conclure le théorème (partie 6). La partie 4 donne les coordonnées qui sont utilisées pour ce calcul. Avant de le traiter dans le cas général, la partie 5 prouve le théorème dans le cas où tous les facteurs de $\rho$ sont absolument simples. La partie 3 donne sur un exemple l'utilisation de la description obtenue. La proposition 7 de la partie 2 qui sert à obtenir cette description sera démontrée dans les parties finales (parties 7 et 8).

Bien que les résultats qui nous intéressent sont pour le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, la description de la singularité sera d'abord obtenue pour $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$.

## 2. Singularité quadratique en une représentation semi-simple

Dans cette partie nous décrivons la structure locale de $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$ au voisinage d'une représentation semi-simple $\rho$. Un voisinage de $\rho$ sera homéomorphe au produit d'un ouvert d'un espace vectoriel et d'un voisinage de 0 dans un cône quadratique dans le groupe de cohomologie $H^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$. De plus une représentation dans ce voisinage sera irréductible si, et seulement si, sa composante dans $H^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ n'appartient jamais à $H^1(\Gamma_g; \mathfrak{p})$, où

$\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ qui est stable par $\rho(\Gamma_g)$ (proposition 8). Le point de départ sera les isomorphismes d'anneaux locaux analytiques qui seront obtenus dans la partie 8.

Nous commençons par quelques rappels de cohomologie des groupes.

2.1. **Cocycles et cobords.** Si $E$ est un $\Gamma_g$-module, l'ensemble $Z^1(\Gamma_g; E)$ des 1-cocycles à valeurs dans $E$ est l'ensemble des fonctions $c$ de $\Gamma_g$ dans $E$ telles que

$$c(\gamma\gamma') = c(\gamma) + \gamma \cdot c(\gamma') \quad \text{pour tous } \gamma, \gamma' \in \Gamma_g.$$

L'ensemble des 1-cobords $B^1(\Gamma_g; E)$ est l'ensemble des 1-cocycles $b$ de la forme

$$b(\gamma) = x - \gamma \cdot x \quad \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma_g \text{ avec } x \in E.$$

Cet ensemble est naturellement isomorphe au quotient de $E$ par $E^{\Gamma_g}$, les invariants par $\Gamma_g$

$$B^1(\Gamma_g; E) \simeq E/E^{\Gamma_g}, \text{ avec } E^{\Gamma_g} = \{x \in E \mid \gamma \cdot x = x \text{ pour tout } \gamma\}.$$

Ainsi le groupe de cohomologie $H^1(\Gamma_g; E)$ peut se réaliser comme le quotient des cocycles par les cobords

$$H^1(\Gamma_g; E) = Z^1(\Gamma_g; E)/B^1(\Gamma_g; E).$$

Les 2-cocycles $Z^2(\Gamma_g, E)$ sont les fonctions $c : \Gamma_g \times \Gamma_g \to E$ vérifiant l'identité, pour tous $\gamma$, $\gamma'$ et $\gamma''$ dans $\Gamma_g$

$$c(\gamma, \gamma'\gamma'') + \gamma \cdot c(\gamma', \gamma'') = c(\gamma\gamma', \gamma'') + c(\gamma, \gamma')$$

et les 2-cobords $B^2(\Gamma_g, E)$ sont les 2-cocycles de la forme

$$\partial f(\gamma, \gamma') = f(\gamma\gamma') - f(\gamma) - \gamma \cdot f(\gamma')$$

où $f$ est une fonction de $\Gamma_g$ dans $E$. Le deuxième groupe de cohomologie est le quotient

$$H^2(\Gamma_g, E) = Z^2(\Gamma_g, E)/B^2(\Gamma_g, E).$$

Si $E$, $F$ et $G$ sont trois $\Gamma_g$-modules et $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire $\Gamma_g$-équivariante, alors $B$ induit

$$H^0(\Gamma_g, E) \times H^2(\Gamma_g, F) \xrightarrow{B} H^2(\Gamma_g, G)$$

$$H^1(\Gamma_g, E) \times H^1(\Gamma_g, F) \xrightarrow{B} H^2(\Gamma_g, G).$$

Si $c$ et $c'$ sont deux 1-cocycles, alors $B(c, c')$ peut être défini par la formule : $B(c, c')(\gamma, \gamma') = B(c(\gamma), \gamma \cdot c'(\gamma'))$.

Le groupe de cohomologie $H^0(\Gamma_g, E)$ est égal aux invariants de $E$ sous l'action de $\Gamma_g$. Lorsque $G$ est le module $\mathbf{k}$ (le corps de base des modules $E$ et $F$) avec l'action trivial de $\Gamma_g$ et que $B$ est un accouplement non-dégénéré entre $E$ et $F$ alors $H^2(\Gamma_g, \mathbf{k}) \simeq \mathbf{k}$ et $B$ induit des accouplements non-dégénérés entre les groupes de cohomologie.

2.2. **Le cône quadratique.** Lorsque $\rho$ est une représentation de $\Gamma_g$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ devient un $\Gamma_g$-module par la représentation adjointe. L'espace tangent de Zariski en $\rho$ à la variété des représentations $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$ s'identifie à $Z^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})_{\mathrm{Ad}\circ\rho})$ et l'espace tangent à l'orbite $G \cdot \rho$ s'identifie à $B^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})_{\mathrm{Ad}\circ\rho})$ ([8] paragraphes 1.2–1.3). Dans la suite de ce texte nous omettrons l'indice $\mathrm{Ad} \circ \rho$ quand il n'y aura pas d'ambiguïté sur l'action de $\Gamma_g$ sur $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$.

Le crochet de Lie $[\cdot,\cdot]$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ permet de définir une application bilinéaire symétrique

$$[\cdot,\cdot] : Z^1(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) \times Z^1(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) \longrightarrow H^2(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})).$$

On notera $Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ le cône quadratique de $Z^1(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ définie par l'équation $[u,u]=0$

$$Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) := \{u \in Z^1(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) \mid [u,u]=0 \text{ dans } H^2(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))\}.$$

C'est ce cône qui décrit le voisinage de $\rho$ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma_g,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$.

**Théorème 6.** *(Goldman & Millson, Simpson) Si $\rho$ est une représentation semi-simple, alors les anneaux locaux analytiques $\mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma_g,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho}$ et $\mathcal{O}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})),0}$ sont isomorphes.*

*Remarques.*
– Si $X$ est une variété analytique et $x$ un point de $X$, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est l'anneau des germes en $x$ de fonctions analytiques.
– Ceci signifie qu'un voisinage de $\rho$ est analytiquement isomorphe à un voisinage de 0 dans $Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$.
– Lorsque l'algèbre de Lie du centralisateur $Z(\rho)^0$ de $\rho$ est égale au centre de $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$, alors la forme bilinéaire $[\cdot,\cdot]$ sur $Z^1(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ est nulle. En effet, nous verrons un peu plus loin que $[u,v]$ est nul si, et seulement si, $\langle z,[u,v]\rangle$ est nul pour tout $z$ dans cette algèbre de Lie (paragraphe 4.1). Quand l'algèbre de Lie de $Z(\rho)^0$ est égale au centre de $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$, on a alors, pour tout $z$ dans cette algèbre de Lie, $[z,u]=0$, donc $\langle z,[u,v]\rangle = \langle [z,u],v\rangle = 0$ et l'on trouve que $Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) = Z^1(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$. Ceci est cohérent avec le fait que les points lisses de la variété des représentations correspondent aux points où la dimension du centralisateur est minimale ([8] proposition 1.2).

On voit aussi facilement que, si $u$ est un cobord à valeurs dans $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$, alors l'application $[u,\cdot]$ est identiquement nulle sur $Z^1(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$. Ceci montre que le crochet est défini sur $H^1(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ et que le cône $Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ est isomorphe au produit de $B^1(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ avec $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$, le cône quadratique de $H^1(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ défini par le crochet

$$Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) = \{u \in H^1(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) \mid [u,u]=0 \text{ dans } H^2(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))\},$$
$$Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) \simeq B^1(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) \times Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) \simeq \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g} \times Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})).$$

Par ailleurs, si $P$ est un sous-groupe contenant $\rho(\Gamma_g)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$, on définit de même les cônes $Q(\mathfrak{p})$ et $Q^H(\mathfrak{p})$. Les applications naturelles de $Z^1(\Gamma_g;\mathfrak{p})$ dans $Z^1(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ et de $H^1(\Gamma_g;\mathfrak{p})$ dans $H^1(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ envoient le cône $Q(\mathfrak{p})$ dans $Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ et respectivement le cône $Q^H(\mathfrak{p})$ dans $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$. On peut voir les cônes associés à $P$ comme des sous-cônes de $Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ et $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$.

2.3. **cône et sous-cônes.** Dans les parties finales, nous préciserons ce théorème dans deux directions :

(1) présence de paraboliques : si $P$ est un parabolique (maximal) d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$, on veut que $\mathrm{Hom}(\Gamma_g,P)$ soit envoyé dans $Q(\mathfrak{p}) \subset Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$.
(2) action du centralisateur : le centralisateur $Z(\rho)$ stabilise $\rho$ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma_g,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$ et agit également sur les cycles en préservant $Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$, on veut aussi un isomorphisme $Z(\rho)^0$-équivariant.

**Proposition 7.** *Soit $\rho$ une représentation semi-simple de* $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$ *et notons $Z(\rho)^0$ la composante neutre du centralisateur de $\rho$.*

*Il existe alors un isomorphisme $Z(\rho)^0$-équivariant $\phi$ d'anneaux locaux analytiques et, pour tout parabolique $P$ contenant $\rho(\Gamma_g)$, un isomorphisme $\phi_P$ tels que les diagrammes suivant sont commutatifs*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma_g,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g}\times Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})),0} \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma_g,P),\rho} \arrow[r, "\phi_P"] & \mathcal{O}_{\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{\Gamma_g}\times Q^H(\mathfrak{p}),0}. \end{tikzcd}$$

*Aussi $\phi$ induit un isomorphisme entre les espaces tangents de Zariski $Z^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$, égal au dual de $\mathfrak{m}_{\mathrm{Hom}(\Gamma_g,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))}/\mathfrak{m}^2_{\mathrm{Hom}(\Gamma_g,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))}$, et $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g} \times H^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) = (\mathfrak{m}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))}/\mathfrak{m}^2_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))})^*$, où $\mathfrak{m}_{\mathrm{Hom}(\Gamma_g,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma_g,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho}$ et où $\mathfrak{m}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))}$ celui de $\mathcal{O}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g}\times Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})),0}$. Par cet isomorphisme l'espace $B^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ tangent à l'orbite $G \cdot \rho$ est envoyé sur $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g}$.*

*En outre, si $\rho$ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, les deux anneaux locaux $\mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma_g,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho}$ et $\mathcal{O}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g}\times Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})),0}$ héritent d'une conjugaison complexe et $\phi$ commute avec la conjugaison complexe.*

Notons que les conclusions de cette proposition, ainsi que celles de la proposition suivante 8, sont valables non seulement pour les groupes de surfaces mais aussi pour tout groupe fondamental de variété kählerienne compacte. Nous reviendrons sur ce point dans la partie 7. Dans cet article, seuls les calculs des parties 4, 5 et 6 sont spécifiques aux groupes de surface.

Nous allons commencer par déduire de cette proposition des conséquences sur la structure locale de $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$, ce qui permettra à la partie 4 de donner des équations explicites pour le cône et les représentations irréductibles. Ces équations seront utilisées dans les parties 5 et 6 pour démontrer le théorème 1.

2.4. **Structure locale.** L'algèbre de Lie de la composante neutre $Z(\rho)^0$ du centralisateur de $\rho(\Gamma_g)$ est égale aux invariants $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g}$. Si $\rho$ est une représentation semi-simple de $\Gamma_g$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, le groupe $Z(\rho)^0$ est réductif et $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g}$ admet un supplémentaire $Z(\rho)^0$-invariant $\mathfrak{u}$. On fixe aussi un compact maximal $K$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ tel que $L = K \cap Z(\rho)^0$ est un compact maximal de $Z(\rho)^0$.

De la proposition précédente 7, nous allons tirer les renseignements suivants sur la structure locale de $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$ en $\rho$.

**Proposition 8.** *Soit $\rho$ une représentation semi-simple dans* $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$, *il existe alors :*

- *un voisinage $U_\rho$ de $\rho$ dans* $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$,
- *un voisinage $V_0$ de $0$ dans le cône $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g} \times Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$,*
- *un voisinage $U_0$ de $0$ dans le supplémentaire $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g}$,*
- *et un isomorphisme analytique $F : U_\rho \xrightarrow{\sim} V_0$,*

*tels que toute représentation $\rho'$ de $U_\rho$ s'écrit de manière unique* $\exp(u_0) \cdot \rho''$*, avec $u_0$ dans $U_0$ et $\rho''$ appartenant à $F^{-1}(Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})))$.*

*De plus l'image $\rho'(\Gamma_g)$ est contenue dans un parabolique si, et seulement si, il existe un parabolique $P$ contenant $\rho(\Gamma_g)$ tel que $\rho''$ appartient à $F^{-1}(Q^H(\mathfrak{p}))$.*

*Les ouverts $U$ et $V$ peuvent être choisis invariants sous l'action du compact maximal $L$ de $Z(\rho)^0$ et l'application $F$ sera $L$-équivariante.*

*Si $\rho$ est à valeurs dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$*, $F$ sera définie sur* $\mathbf{R}$.

**Démonstration** :

On va d'abord se ramener à la situation où tous les cônes sont des sous-cônes d'un même espace vectoriel.

Pour la représentation $\rho$, le $\Gamma_g$-module $V = \mathbf{C}^n$ se décompose comme une somme
$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m,\ V_i \simeq (V_i')^{n_i}$$
où $V_1', \ldots, V_m'$ sont des représentations irréductibles distinctes de $\Gamma_g$.

Les paraboliques maximaux $P$ contenant $\rho(\Gamma_g)$ sont alors les stabilisateurs des sous-espaces $W$ de la forme
$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m, \quad W_i \subset V_i \text{ et } W_i \simeq (V_i')^{k_i}$$
$$P = \{g \in G \mid g(W) = W\}.$$
On retrouve bien le fait affirmé plus haut qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes de paraboliques maximaux contenant $\rho(\Gamma)$ pour l'action par conjugaison du compact maximal $L$ ; ces classes peuvent être indexées par les $m$-uplets d'entiers $(k_1, \ldots, k_m)$ avec $(k_1, \ldots, k_m) \neq (0, \ldots, 0)$, $k_i \leq n_i$ pour tout $i$ et $\sum k_i < \sum n_i$.

Soit $H_{i,j}$ un supplémentaire de $B^1(\Gamma_g; \mathrm{Hom}(V_j', V_i'))$ dans $Z^1(\Gamma_g; \mathrm{Hom}(V_j', V_i'))$, pour tout $(i,j)$. Ce supplémentaire $H_{i,j}$ est donc isomorphe à $H^1(\Gamma_g; \mathrm{Hom}(V_j', V_i'))$.

Ces choix permettent de construire un supplémentaire $H$ de $B^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ dans l'espace $Z^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$. Un cocycle $c$ appartient à $H$ si, pour tous $\Gamma_g$-morphismes $\varphi : V \to V_i'$ et $\psi : V_j' \to V$, le cocycle $\varphi \circ c \circ \psi$ appartient à $H_{i,j}$.

Le supplémentaire $H$ admet la description plus directe suivante. Pour tout $i$, on fixe une décomposition du $\Gamma_g$-module $V_i$
$$V_i = V_i^1 \oplus \cdots \oplus V_i^{n_i},\ V_i^k \simeq V_i'.$$
Le $\Gamma_g$-module $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}) = \mathrm{End}(V)$ se décompose alors
$$\mathrm{End}(V) = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}(V_j, V_i) = \bigoplus_{i,j} \bigoplus_{k \leq n_i, l \leq n_j} \mathrm{Hom}(V_j^l, V_i^k)$$
et l'on a encore une décomposition similaire pour les cocycles de $Z^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$. Un cocycle $c$ à valeurs dans $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ s'écrit ainsi comme une famille
$$c = \left(c_{i,j}^{k,l}\right) \quad \text{avec } c_{i,j}^{k,l} \text{ dans } Z^1(\Gamma_g; \mathrm{Hom}(V_j^l, V_i^k)) = Z^1(\Gamma_g; \mathrm{Hom}(V_j', V_i')),$$
le cocycle $c$ appartient à $H$ si, et seulement si, $c_{i,j}^{k,l}$ appartient à $H_{i,j}$ pour tous $i, j, k, l$.

Par construction $H$ est $Z(\rho)^0$-invariant et, pour tout parabolique $P$ contenant $\rho(\Gamma_g)$ et d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$, $H \cap Z^1(\Gamma_g; \mathfrak{p})$ est un supplémentaire de $B^1(\Gamma_g; \mathfrak{p})$.

Par ailleurs, ce supplémentaire $H$ permet d'écrire $Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ et $Q(\mathfrak{p})$ comme des produits

$$\begin{aligned} Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) &= B^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) \times H \cap Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) \simeq \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g} \times Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})), \\ Q(\mathfrak{p}) &= B^1(\Gamma_g; \mathfrak{p}) \times H \cap Q(\mathfrak{p}) \simeq \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{\Gamma_g} \times Q^H(\mathfrak{p}), \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})),0} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g} \times Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})),0} \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{Q(\mathfrak{p}),0} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{O}_{\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{\Gamma_g} \times Q^H(\mathfrak{p}),0} \end{tikzcd}$$

et la flèche supérieure est $Z(\rho)^0$-équivariante.

De la proposition 7, il existe alors un isomorphisme $Z(\rho)^0$-équivariant $\psi$ et, pour tout $P$, un isomorphisme $\psi_P$ tels que

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma_g,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})),0} \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma_g,P),\rho} \arrow[r, "\psi_P"] & \mathcal{O}_{Q(\mathfrak{p}),0}. \end{tikzcd}$$

La proposition 8 est maintenant équivalente à la proposition suivante. □

**Proposition 9.** *Soit $\rho$ une représentation semi-simple de* $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$.

*Notons $H$ un supplémentaire $Z(\rho)^0$-invariant de $B^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ dans $Z^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ tel que $H \cap Z^1(\Gamma_g; \mathfrak{p})$ est un supplémentaire de $B^1(\Gamma_g; \mathfrak{p})$ pour tout $P$ contenant $\rho(\Gamma_g)$.*

*Il existe alors :*

– *un voisinage $U_\rho$ de $\rho$ dans* $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$,
– *un voisinage $V_0$ de 0 dans $Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$,*
– *un voisinage $U_0$ de 0 dans $\mathfrak{u}$, le supplémentaire de $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g}$,*
– *un isomorphisme analytique $F$ de $U_\rho$ sur $V_0$,*

*tels que tout $\rho'$ de $U_\rho$ s'écrive de manière unique* $\exp(u_0) \cdot \rho''$ *avec $u_0$ dans $U_0$ et $F(\rho'')$ dans $Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) \cap H$. De plus $\rho'$ est irréductible si, et seulement si, $F(\rho'')$ n'appartient pas à $Q(\mathfrak{p}) \cap H$ pour tout $P$.*

*De plus, si $\rho$ appartient à* $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$, *$F$ est défini sur* $\mathbf{R}$.

**Démonstration** : La présentation donnée de $\Gamma_g$ en introduction nous font considérer $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$ inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})^{2g}$ et $Z^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ inclus dans $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{2g}$ car une représentation est un 1-cocycle sont complètement déterminés par l'image des générateurs.

Les isomorphismes d'anneaux locaux analytiques impliquent l'existence d'un isomorphisme analytique $F$ entre un voisinage $U$ de $\rho$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})^{2g}$ et un voisinage $V$ de 0 dans $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{2g}$ ([11] théorème B.14 et corollaire B.15) tel que

$$F : U \xrightarrow{\sim} V$$
$$\text{et } F : U \cap \mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})) \xrightarrow{\sim} V \cap Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})).$$

De plus on peut supposer les intersections $U \cap \mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$ et $V \cap Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ invariantes par $L$ et la restriction de $F$ à ces ensembles est $L$-équivariante par unicité de $F$ (*op.cit.*).

D'après les diagrammes d'isomorphismes de la proposition 7, pour tout parabolique $P$ contenant $\rho(\Gamma_g)$, $F$ envoie le germe de variétés $(\mathrm{Hom}(\Gamma_g, P), \rho)$ sur $(Q(\mathfrak{p}), 0)$. Donc, quitte à restreindre $U$ (et aussi $V$), on peut supposer

$$F : U \cap \mathrm{Hom}(\Gamma_g, P_i) \xrightarrow{\sim} V \cap Q(\mathfrak{p}_\mathfrak{i})$$

pour tout $i$, où $P_1, \ldots, P_k$ sont des représentants des classes de paraboliques maximaux pour l'action par conjugaison du compact maximal $L = K \cap Z(\rho)^0$.

L'invariance par $L$ implique alors que, pour tout parabolique maximal $P$ contenant $\rho(\Gamma_g)$, $F$ est un isomorphisme de $U \cap \mathrm{Hom}(\Gamma_g, P)$ sur $V \cap Q(\mathfrak{p})$.

Soit $U'$ un voisinage de $\rho$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})^{2g}$ invariant par $L$ et dont l'adhérence est contenue dans l'intérieur de $U$

$$\overline{U'} \subset \mathring{U}.$$

Il existe donc $U_Z$, voisinage de l'identité dans $Z(\rho)^0$, tel que

$$U_Z \cdot U' \subset U.$$

Alors, en notant $V'$ l'image par $F$ de $U'$, pour tout $z$ dans le produit $U_Z L$, le diagramme

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} F:\ U' \cap \mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})) & \xrightarrow{\sim} & V' \cap Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) \\ \downarrow{\scriptstyle c(z)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}(z)} \\ U \cap \mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})) & \xrightarrow{\sim} & V \cap Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) \end{array}$$

est commutatif, avec $c(z)$ la conjugaison par $z$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

Fixons aussi $H'$ un supplémentaire de $B^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ dans $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{2g}$ tel que $H = H' \cap Z^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$.

Quitte à faire des restrictions, il existe un voisinage $L$-invariant $U_0$ de 0 dans le supplémentaire $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g}$ tel que

- $\exp(U_0) \cdot \rho = U \cap \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \cdot \rho$,
- l'action de $\exp(U_0)$ sur $U$ est libre, c'est-à-dire tout élément de la forme $\exp(u_0)$ avec $u_0$ dans $U_0$ n'a pas de point fixe dans $U$.

De plus, comme l'espace tangent à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \cdot \rho$ est $B^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$, par le choix de $H'$ on est dans une situation de transversalité

$$U = \exp(U_0) \cdot F^{-1}(V \cap H'),$$

tout élément de $U$ s'écrit de manière unique $\exp(u_0) \cdot f$ avec $u_0$ dans $U_0$ et $f$ dans $F^{-1}(V \cap H')$ et donc, toujours en restreignant

$$\begin{aligned} U \cap \mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})) &= \exp(U_0) \cdot F^{-1}(Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) \cap V \cap H') \\ &= \exp(U_0) \cdot F^{-1}(Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) \cap V \cap H). \end{aligned}$$

Pour un parabolique $P$ contenant $\rho(\Gamma_g)$ fixé, les mêmes arguments montrent que

$$U \cap \mathrm{Hom}(\Gamma_g, P) = U \cap U_P \cdot F^{-1}(Q(\mathfrak{p}) \cap V \cap H)$$

où ici $U_P$ est un voisinage de l'identité dans $P$, que l'on peut choisir arbitrairement petit quitte à restreindre $U$ et aucune transversalité n'est exigée.

Soit $U_G$ un voisinage de l'identité dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, on a alors

$$\begin{aligned} U' \cap (U_G L) \cdot \mathrm{Hom}(\Gamma_g, P) &= U' \cap (U_G L U_P) \cdot F^{-1}(Q(\mathfrak{p}) \cap V' \cap H) \\ &= U' \cap (U_G {}^L U_P L) \cdot F^{-1}(Q(\mathfrak{p}) \cap V' \cap H), \end{aligned}$$

avec ${}^L U_P = \{lul^{-1}, l \in L, u \in U_P\}$. Quitte à restreindre $U_G$ et $U_P$ on peut supposer que

$$U_G {}^L U_P \subset \exp(U_0) U_Z,$$

car $\exp(U_0)U_Z$ est un voisinage de l'identité dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

Ainsi, en utilisant l'invariance par $Z(\rho)^0$ (équation (*))

$$\begin{aligned} U' \cap (U_G L) \cdot \mathrm{Hom}(\Gamma_g, P) &= U' \cap \exp(U_0) \cdot F^{-1}\big((U_Z L) \cdot (Q(\mathfrak{p}) \cap V \cap H)\big) \\ &= U' \cap \exp(U_0) \cdot F^{-1}\big(\big((U_Z L) \cdot (Q(\mathfrak{p}) \cap V)\big) \cap H\big). \end{aligned}$$

En particulier

$$(**) \quad \big(U' \cap (U_G L) \cdot \mathrm{Hom}(\Gamma_g, P)\big) \cap F^{-1}(Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) \cap H) = U' \cap F^{-1}\big(\big((U_Z L) \cdot (Q(\mathfrak{p}) \cap V)\big) \cap H\big).$$

Une représentation $\rho''$ de $U' \cap F^{-1}(Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) \cap H)$ appartient donc à $(U_G L) \cdot \mathrm{Hom}(\Gamma_g, P)$ si, et seulement si, $F(\rho'')$ appartient à $Q(\mathrm{Ad}(z)(\mathfrak{p}))$ pour un élément $z$ du produit $U_Z L$.

Aussi, on peut appliquer ceci à la liste finie $P_1, \ldots, P_k$ des représentants des classes de paraboliques maximaux contenant $\rho(\Gamma_g)$, de sorte que (**) vaut pour chacun des $P_i$.

Le lemme 5 nous donne alors :

> Un élément $\rho' = \exp(u_0) \cdot \rho''$ de $\exp(U_0) \cdot F^{-1}(Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) \cap V' \cap H)$ est irréductible si, et seulement si, $\rho''$ n'appartient pas à $F^{-1}(Q(\mathfrak{p}) \cap V' \cap H)$ pour tout $P$ contenant $\rho(\Gamma_g)$.

Ce qui était le résultat cherché. Par ailleurs lorsque $\rho$ est réelle, l'isomorphisme $\phi$ de $\mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})), \rho}$ dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g} \times Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})), 0}$ est défini sur $\mathbf{R}$ et donc $F$ aussi. □

## 3. Un exemple

> Dans cette partie, nous appliquons sur une représentation en dimension deux les résultats de la partie précédente. Cet exemple met en évidence les calculs et la démarche adoptés par la suite.

On étudie ici une représentation $\rho$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ donnée par

$$\rho = \chi_1 \oplus \chi_2$$

où $\chi_1, \chi_2 : \Gamma_g \to \mathbf{R}^*$ sont deux caractères distincts de $\Gamma_g$.

La proposition 8 donne un voisinage $U$ de $\rho$ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_2(\mathbf{C}))$ et un voisinage $V$ de 0 dans $B^1(\Gamma_g, \mathfrak{gl}_2(\mathbf{C})) \times Q^H(\mathfrak{gl}_2(\mathbf{C}))$ tels que toute représentation $\rho'$ de $U$ s'écrit de manière unique $\exp(u) \cdot \rho''$ avec $\rho''$ une représentation qui est envoyée dans $Q^H(\mathfrak{gl}_2(\mathbf{C}))$ par $F$. De plus $\rho'$ est irréductible si, et seulement si, $F(\rho'')$ n'appartient pas à $H^1(\Gamma_g, \mathfrak{p})$ pour toute sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ stabilisée par $\rho(\Gamma_g)$.

Ici, il y a deux telles sous-algèbres paraboliques

$$\mathfrak{p} = \{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\} \text{ et } \mathfrak{q} = \{\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}\}$$

où les matrices sont écrites dans une base compatible avec la décomposition $\rho = \chi_1 \oplus \chi_2$.

Comme ici le morphisme $F$ est défini sur $\mathbf{R}$, il envoie les représentations réelles $U \cap \mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}))$ dans $B^1(\Gamma_g, \mathfrak{gl}_2(\mathbf{R})) \times Q^H(\mathfrak{gl}_2(\mathbf{R}))$. On s'intéresse maintenant aux représentations irréductibles voisines de $\rho$ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}))$. D'après la proposition 8 il faut comprendre le sous ensemble de $Q^H(\mathfrak{gl}_2(\mathbf{R}))$ des cocycles n'appartenant ni à $H^1(\Gamma_g, \mathfrak{p})$ ni à $H^1(\Gamma_g, \mathfrak{q})$.

La décomposition de $\mathbf{R}^2 = V_1 \oplus V_2$ en deux droites $\Gamma_g$-invariantes permet de décomposer $\mathfrak{gl}_2(\mathbf{R}) = \mathrm{End}(\mathbf{R}^2)$ en quatre droites invariantes

$$\mathrm{Hom}(V_1, V_1), \mathrm{Hom}(V_2, V_1), \mathrm{Hom}(V_1, V_2), \mathrm{Hom}(V_2, V_2)$$

sur lesquelles $\Gamma_g$ agit respectivement par les caractères

$$1, \chi, \chi^{-1}, 1$$

où 1 est le caractère trivial et $\chi = \chi_1 \chi_2^{-1}$.

De la même manière un élément $u$ de $H^1(\Gamma_g, \mathfrak{gl}_2(\mathbf{R}))$ se décompose

$$u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

avec $u_{ij}$ dans $H^1(\Gamma_g, \mathrm{Hom}(V_j, V_i))$ pour tous $i, j$. Le cocycle $u$ n'appartient pas à $H^1(\Gamma_g, \mathfrak{p})$ si, et seulement si, $u_{21}$ est non-nul, il n'appartient pas à $H^1(\Gamma_g, \mathfrak{q})$ si, et seulement si, $u_{12}$ est non-nul.

Une base de l'algèbre de Lie de $Z(\rho)^0$ est donnée par les deux éléments

$$\mathrm{id} \text{ et } z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, $[u, u]$ est nul si, et seulement si, $\langle \mathrm{id}, [u, u] \rangle = 0$ et $\langle z, [u, u] \rangle = 0$ et la première équation $\langle \mathrm{id}, [u, u] \rangle = 0$ est automatique. Calculons donc le cocycle $\langle z, [u, u] \rangle = c$ de $H^2(\Gamma_g, \mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}$, la forme de Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est ici la trace des endomorphismes. La formule pour le produit de cocycles donne pour tous $\gamma$ et $\gamma'$

$$\begin{aligned}
c(\gamma, \gamma') &= \langle z, [u(\gamma), \rho(\gamma) u(\gamma')] \rangle \\
&= \mathrm{tr}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [\begin{pmatrix} u_{11}(\gamma) & u_{12}(\gamma) \\ u_{21}(\gamma) & u_{22}(\gamma) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{11}(\gamma') & \chi(\gamma) u_{12}(\gamma') \\ \chi^{-1}(\gamma) u_{21}(\gamma') & u_{22}(\gamma') \end{pmatrix}]) \\
&= u_{12}(\gamma) \chi^{-1}(\gamma) u_{21}(\gamma') - \chi(\gamma) u_{12}(\gamma') u_{21}(\gamma) \\
&= 2 u_{12} \cdot u_{21}(\gamma, \gamma') - (u_{12}(\gamma) \chi^{-1}(\gamma) u_{21}(\gamma') + \chi(\gamma) u_{12}(\gamma') u_{21}(\gamma))
\end{aligned}$$

où $u_{12} \cdot u_{21}$ est l'élément de $H^2(\Gamma_g, \mathbf{R})$ produit de $u_{12}$ appartenant à $H^1(\Gamma_g, \mathbf{R}_\chi)$ et de $u_{21}$ appartenant à $H^1(\Gamma_g, \mathbf{R}_{\chi^{-1}})$. En utilisant que $u_{12}$ et $u_{21}$ sont des cocycles, il est facile de voir que le terme entre parenthèses dans l'équation ci-dessus est le cobord $\partial f$, où $f$ est la fonction $\gamma \mapsto u_{12}(\gamma) u_{21}(\gamma)$ . Ce qui signifie l'égalité

$$\langle z, [u, u] \rangle = 2 u_{12} \cdot u_{21}$$

dans $H^2(\Gamma_g, \mathbf{R})$. Ceci implique que le cône $Q^H(\mathfrak{gl}_2(\mathbf{R}))$ est le produit de l'espace vectoriel $H^1(\Gamma_g, \mathbf{R}) \times H^1(\Gamma_g, \mathbf{R})$ et du sous-ensemble de $H^1(\Gamma_g, \mathbf{R}_\chi) \times H^1(\Gamma_g, \mathbf{R}_{\chi^{-1}})$ défini par la nullité du terme quadratique ci-dessus. Les observations ci-dessus nous amènent donc à vérifier la densité et la connexité de

$$\{(u,v) \in H^1(\Gamma_g, \mathbf{R}_\chi) \times H^1(\Gamma_g, \mathbf{R}_{\chi^{-1}}) \mid u \cdot v = 0, u \neq 0, v \neq 0\}$$

dans

$$\{(u,v) \in H^1(\Gamma_g, \mathbf{R}_\chi) \times H^1(\Gamma_g, \mathbf{R}_{\chi^{-1}}) \mid u \cdot v = 0\}.$$

La densité est immédiate.

Comme le caractère $\chi$ est différent de 1, $H^1(\Gamma_g, \mathbf{R}_\chi)$ est de dimension $2g-2$, de même $H^1(\Gamma_g, \mathbf{R}_{\chi^{-1}})$ est de dimension $2g-2$. L'accouplement donné par le produit

$$H^1(\Gamma_g, \mathbf{R}_\chi) \times H^1(\Gamma_g, \mathbf{R}_{\chi^{-1}}) \longrightarrow H^2(\Gamma_g, \mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}$$

est non-dégénéré par la dualité de Poincaré. En identifiant les différents $H^1$ à $\mathbf{R}^{2g-2}$, il faut examiner la connexité de

$$\{(u,v) \in \mathbf{R}^{2g-2} \mid B(u,v) = 0, u \neq 0, v \neq 0\}$$

où $B$ est une forme bilinéaire non-dégénérée sur $\mathbf{R}^{2g-2}$ et l'on ne perd pas en généralité à supposer que $B$ est la forme symplectique standard $\omega$ sur $\mathbf{R}^{2g-2}$.

Si on fixe $g = 2$, alors l'ensemble considéré est

$$\{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid \omega(u,v) = 0, u \neq 0, v \neq 0\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des couples de vecteurs non-nuls et proportionnels, cet ensemble a deux composantes connexes selon le signe du coefficient de proportionnalité. Cet exemple de représentation de $\Gamma_2$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ constitue donc un cas où les conclusions du théorème 1 ne sont pas vérifiés, c'est le seul exemple connu de l'auteur.

Lorsque $g > 2$, $2g - 2 \geq 4$ et la connexité de

$$\{(u,v) \in \mathbf{R}^{2g-2} \mid \omega(u,v) = 0, u \neq 0, v \neq 0\}$$

est facile. Le minorant donné par le théorème est $g \geq 5$.

Remarquons qu'il fallait en principe montrer la connexité et la densité de l'image des représentations irréductibles dans *une base de voisinages* de 0 dans le cône $Q^H(\mathfrak{gl}_2(\mathbf{R}))$. Nous avons déterminé ici la densité et la connexité du sous-ensemble en question dans tout $Q^H$, mais l'invariance des ensembles en question par homothéties rend ces deux problèmes équivalents.

## 4. Equations du cône et critère d'irréductibilité

La proposition 8 ramène à donner des équations pour le cône $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ et à décrire l'ensemble

$$Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})) - \bigcup_{P \supset \rho(\Gamma_g)} H^1(\Gamma_g; \mathfrak{p}),$$

qui correspondait aux représentations irréductibles. On explicite maintenant la nullité du crochet $[\cdot,\cdot]$ sur $H^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ en utilisant une décomposition de cet espace. La même décomposition est aussi utilisée pour énoncer un critère d'irréductibilité (critère (A)) qui assure qu'un cocycle est bien dans ce complémentaire.

Dans cette partie et les deux suivantes, nous n'attribuons plus de symbole pour la représentation dont on est en train d'étudier le voisinage.

4.1. **Dualité.** Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la forme de Killing sur $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$, ici $\langle u,v\rangle = \mathrm{tr}uv$, ceci permet de définir un accouplement parfait

$$H^0(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))\times H^2(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))\xrightarrow{\langle\cdot,\cdot\rangle} H^2(\Gamma_g;\mathbf{C})\simeq\mathbf{C}.$$

Le fait que cet accouplement est parfait suit de la dualité de Poincaré. De plus le groupe $H^0(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ est égal aux invariants $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g}$, c'est-à-dire l'algèbre de Lie de $Z(\rho)^0$. En outre un élément $\alpha$ de $H^2(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ est nul si, et seulement si,

$$\text{pour tout } z \text{ dans } \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g},\ \langle z,\alpha\rangle = 0.$$

Si $u$ appartient à $H^1(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$, $[u,u]$ est nul si, et seulement si, pour tout $z$ dans $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g}$, $\langle z,[u,u]\rangle = 0$. La forme bilinéaire $\langle z,[\cdot,\cdot]\rangle$ sur $H^1(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ est symétrique.

4.2. **Coordonnées.** Écrivons $V=\mathbf{C}^n = V_1\oplus\cdots\oplus V_m$ et

$$V_i = V_i^1\oplus\cdots\oplus V_i^{n_i}$$

avec $V_i^k\simeq V_i'$ et $V_1',\dots,V_m'$ des représentations irréductibles de $\Gamma_g$ deux à deux distinctes. La décomposition de $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ est

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}) = \mathrm{End}(V)\simeq\bigoplus_{i,j}\mathrm{Hom}(V_j,V_i)\simeq\bigoplus_{i,j}\ \bigoplus_{k\le n_i,l\le n_j}\mathrm{Hom}(V_j^l,V_i^k)$$

$$\text{et } \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g} = \mathrm{End}(V)^{\Gamma_g}\simeq\bigoplus_i\mathrm{End}(V_i)^{\Gamma_g}.$$

Une base de $\mathrm{End}(V_i)^{\Gamma_g}$ est donnée par les

$$z_i^{k_0,l_0} = (\delta_{k,k_0}\delta_{l,l_0}\mathrm{id})\in\bigoplus_{k,l}\mathrm{Hom}(V_i^l,V_i^k),$$

avec $k_0,l_0$ allant de 1 à $n_i$. Pour écrire les équations de $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ nous utiliserons les éléments de cette base de $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g}$.

De même le groupe de cohomologie $H^1(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ admet des décompositions similaires : une classe de cohomologie $u$ de $H^1(\Gamma_g;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ s'écrit

$$u=(u_{i,j})\in\bigoplus_{i,j}H^1\big(\Gamma_g;\mathrm{Hom}(V_j,V_i)\big)$$

$$\text{et } u_{i,j} = \big(u_{i,j}^{k,l}\big)\in\bigoplus_{k\le n_i,l\le n_j}H^1\big(\Gamma_g;\mathrm{Hom}(V_j^l,V_i^k)\big).$$

4.3. **Irréductibilité.** Critère (A) :

> Une condition suffisante d'irréductibilité est donc : pour tous $i,j$, la famille $\big(u_{i,j}^{k,l}\big)$ de $H^1(\Gamma_g;\mathrm{Hom}(V_j',V_i'))$ est linéairement indépendante.

Sous cette condition, il n'existe pas de parabolique $P$ tel que $u$ appartient à $H^1(\Gamma_g;\mathfrak{p})$. En effet, cette condition ne dépend pas des décompositions fixées pour les $V_i$ et si $P$ est le parabolique associé au sous-espace $W$ tel que

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m, \text{ avec } W_i = V_i^1 \oplus \cdots \oplus V_i^{k_i}$$

alors, l'appartenance à $H^1(\Gamma_g; \mathfrak{p})$ s'exprime par l'annulation de certains des coefficients $u_{i,j}^{k,l}$.

4.4. **Equations de $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$.** En utilisant la base de $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^{\Gamma_g}$, il vient pour l'élément $z_{i_0}^{k_0,l_0}$ de $\mathrm{End}(V_{i_0})^{\Gamma_g}$

$$\frac{1}{2}\langle z_{i_0}^{k_0,l_0}, [u,u]\rangle = \sum_i \sum_{l=1}^{n_i} \mathbf{tr}\, u_{i_0,i}^{l_0,l} u_{i,i_0}^{l,k_0} = 0$$

où on a noté $\mathbf{tr}$ l'accouplement entre $H^1(\Gamma_g; \mathrm{Hom}(V_j', V_i'))$ et $H^1(\Gamma_g; \mathrm{Hom}(V_i', V_j'))$ venant de l'accouplement sur les coefficients défini par la trace.

Quand $i = j$, $\mathbf{tr}$ est une forme antisymétrique sur $H^1(\Gamma_g; \mathrm{End}(V_i'))$. Ce n'est pas contradictoire avec la symétrie de $\langle z, [\cdot,\cdot]\rangle$, une forme *antisymétrique* sur les coefficients donne lieu à une forme *symétrique* sur $H^1$ et vice versa.

## 5. Densité et connexité dans le cas absolument simple

Nous prouvons dans cette partie le théorème 1 pour une représentation semi-simple de $\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ qui vérifie de plus que tous ses facteurs simples sont absolument simples. Nous utilisons les équations obtenues dans la partie précédente ainsi que le critère d'irréductibilité. L'hypothèse faite ici simplifiera les calculs que nous traitons de manière générale dans la partie suivante.

5.1. **Réalité.** Un premier travail est décrire quels sont les cocycles réels.

Ici $V = \mathbf{R}^n$ est une représentation réelle de $\Gamma_g$ satisfaisant à l'hypothèse faite dans cette partie, *i.e.* tous les facteurs simples sont absolument simples. Dans ce cas

$$V \otimes \mathbf{C} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m,$$

avec

$$V_i = V_i^1 \oplus \cdots \oplus V_i^{n_i}$$

où $V_i^k = V_i'$ et $V_1', \ldots, V_m'$ est la liste des représentations (complexes) irréductibles qui apparaissent dans $V \otimes \mathbf{C}$.

Comme, par hypothèse, la représentation $\rho$ est une somme (sur $\mathbf{R}$) de modules absolument simples, chacun des $V_i'$ provient d'un module défini sur $\mathbf{R}$ et la conjugaison complexe $\sigma$ sur $V \otimes \mathbf{C}$ s'écrit comme une famille d'applications

$$\sigma : V_i^k \longrightarrow V_i^k.$$

**Lemme 10.** *Les éléments de $H^1(\Gamma_g; \mathrm{End}(V \otimes \mathbf{C}))$ qui correspondent à des représentations réelles par l'isomorphisme analytique de la proposition 8 sont ceux qui sont stables par la conjugaison complexe.*

C'est-à-dire exactement les éléments de $H^1(\Gamma_g, \mathrm{End}(V))$.

5.2. **Coordonnées.** Un élément $u$ de $H^1(\Gamma_g;\mathrm{End}(V\otimes\mathbf{C}))$ s'écrit ici comme une famille

$$u=\left(u_{i,j}\right)$$

avec $u_{i,j}=\left(u_{i,j}^{k,l}\right)$ dans $H^1\left(\Gamma_g;\mathrm{Hom}(V_j,V_i)\right)=\bigoplus_{k,l}H^1\left(\Gamma_g;\mathrm{Hom}(V_j^l,V_i^k)\right)$.

**Lemme 11.** *Un tel élément $u$ de $H^1(\Gamma_g;\mathrm{End}(V\otimes\mathbf{C}))$ est* réel *si, et seulement si, pour tous $i,j,k,l$*

$$\sigma u_{i,j}^{k,l}\sigma=u_{i,j}^{k,l}.$$

En effet, c'est ainsi que s'exprime la conjugaison complexe sur $\mathrm{End}(V\otimes\mathbf{C})=\mathrm{End}(V)\otimes\mathbf{C}$. Ce qui signifie que :

– $u_{i,j}^{k,l}$ appartient à $H^1\left(\Gamma_g;\mathrm{Hom}(V_j^{l,\sigma},V_i^{k,\sigma})\right)$, où l'on a noté $V_i^{k,\sigma}\subset V_i^k$ le sous-espace invariant par la conjugaison complexe. Autrement dit, $V_i^{k,\sigma}$ est le $\Gamma_g$-module réel correspondant à $V_i^k$.

5.3. **Equations.** De plus les équations définissant le cône quadratique deviennent pour un tel $u$ :

– avec $z_{i_0}^{k_0,l_0}$ de la base de $\mathrm{End}(V_{i_0})^{\Gamma_g}$

$$\sum_i\sum_{l=1}^{n_i}\mathbf{tr}_{\mathbf{R}}u_{i_0,i}^{l_0,l}u_{i,i_0}^{l,k_0}=0$$

où l'on a noté $\mathbf{tr}_{\mathbf{R}}$ l'accouplement sur $H^1\left(\Gamma_g;\mathrm{Hom}(V_i^{k,\sigma},V_j^{l,\sigma})\right)\times H^1\left(\Gamma_g;\mathrm{Hom}(V_j^{l,\sigma},V_i^{k,\sigma})\right)$ défini par la trace.

5.4. **Conclusions et démonstration du théorème 1.** Plusieurs remarques vont maintenant permettre de finir :

(1) dimensions :
   – $u_{i,j}^{k,l}$ appartient à $H^1\left(\Gamma_g;\mathrm{Hom}(V_j^{l,\sigma},V_i^{k,\sigma})\right)$ qui est de dimension
   $$(2g-2)\times\dim V_i^k\times\dim V_j^l+2\delta_{i,j}.$$
   Une borne inférieure à ces dimensions est $(2g-2)$.

(2) Les équations écrites sont des équations *linéaires* en les termes suivants :
   – les coefficients des matrices antisymétriques
   $$N^i:=(\mathbf{tr}_{\mathbf{R}}u_\alpha v_\beta)_{\alpha,\beta},$$
   $u_\alpha$ et $v_\beta$ décrivant tous deux
   $$\left(u_{i,i}^{l,k}\right)_{k\geq l}.$$
   – les coefficients des matrices suivantes, $j\neq i$
   $$M^{i,j}:=(\mathbf{tr}_{\mathbf{R}}u_\alpha v_\beta)_{\alpha,\beta},$$
   $u_\alpha$ décrivant $\left(u_{i,j}^{l,k'}\right)$ et $v_\beta$ décrivant $\left(u_{j,i}^{l',k}\right)$. Ces matrices satisfont les relations ${}^tM^{j,i}=-M^{i,j}$.

Ceci construit une application $\Pi$ de $H^1(\Gamma_g,\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}))$ dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel qui à $u$ associe l'ensemble de ces matrices $(N^i,M^{i,j})$ et un élément $u$ appartient au cône $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}))$ si, et seulement si, $\Pi(u)$ appartient au sous-espace vectoriel défini par les équations du paragraphe 5.3. Ici, nous avons écrit beaucoup plus de termes de la forme $\mathbf{tr}_{\mathbf{R}} u_\alpha v_\beta$ qu'il n'en apparaît réellement dans les équations.

Le fait que le nombre de termes est majoré en fonction de la dimension $n$ sera important pour conclure. Une borne est par exemple $n^4$, car le nombre d'éléments de la forme $\left(u_{i,j}^{k,l}\right)$ intervenant dans ces équations est majoré par $n^2$. Cette borne est donc indépendante du genre $g$.

Maintenant il reste à voir, une fois toutes ces « traces » fixées, c'est-à-dire une fois $\Pi(u)$ fixé, si l'ensemble des éléments $u = \left(u_{i,j}^{k,l}\right)$ satisfaisant au critère d'irréductibilité (A) de la partie précédente est connexe par arcs. Pour fixer les idées, énonçons ce résultat sous la forme d'une proposition.

**Proposition 12.** *Si le genre $g$ est assez grand (supérieur à $n^2+1$ suffit), alors le cône quadratique $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}))$ fibre par l'application $\Pi$ au dessus d'un espace vectoriel réel de dimension finie. Dans chacune des fibres, l'ensemble des éléments vérifiant le critère (A) d'irréductibilité est non vide et connexe par arcs.*

Nous décomposons la démonstration de cette proposition en une série de lemmes.

**Lemme 13.** *Si $E$ est un $\Gamma_g$-module réel et si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée $\Gamma_g$-invariante sur $E$, alors l'accouplement défini par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur*

$$\begin{aligned} H^1(\Gamma_g;E)\times H^1(\Gamma_g;E) &\longrightarrow H^2(\Gamma_g;\mathbf{R})\simeq\mathbf{R} \\ (v,w) &\longmapsto \langle v,w\rangle \end{aligned}$$

*est une forme antisymétrique non-dégénérée.*

**Démonstration** : C'est encore la dualité de Poincaré. □

Aussi

**Lemme 14.** *Soit $m$ un entier fixé. Si $F$ est un espace vectoriel réel de dimension plus grande que $2m$ muni d'une forme bilinéaire antisymétrique $\omega$ non-dégénérée, alors pour toute matrice antisymétrique*

$$(a_{i,j})_{1\le i,j\le m}$$

*l'ensemble des vecteurs $(v_i)_{1\le i\le m}$ linéairement indépendants et satisfaisant :*

$$\textit{pour tous } i,j,\ \omega(v_i,v_j)=a_{i,j}$$

*est non vide et connexe par arcs.*

**Démonstration** : Soit $A=(a_{i,j})$ une matrice antisymétrique de taille $m$ et soit $\omega_A$ la forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathbf{R}^m$ définie par $A$. L'espace $(\mathbf{R}^m,\omega_A)$ se décompose alors comme une somme de $k$ plans hyperboliques et du noyau de $\omega_A$ de dimension $m-2k$. Il s'injecte donc dans $(F,\omega)$ et l'image de la base canonique de $\mathbf{R}^m$ fournit alors un $m$-uplet $(v_1,\dots,v_m)$ de vecteurs linéairement indépendants et satisfaisant $\omega(v_i,v_j)=a_{i,j}$ pour tous $i,j$.

Ceci prouve l'existence de tels $m$-uplets. Par ailleurs, deux $m$-uplets satisfaisant à ces équations définissent deux injections de $(\mathbf{R}^m, \omega_A)$ dans $(F, \omega)$ et ces injections sont conjuguées par un élément du groupe symplectique. La connexité du groupe symplectique implique donc la connexité cherchée. □

On appliquera ce dernier lemme à l'espace $F = H^1(\Gamma_g; \mathrm{End}(V_i^{\prime,\sigma}))$ dont la dimension est contrôlée par le genre $g$.

Les lemmes équivalents pour les accouplements sont :

**Lemme 15.** *Soient $E$ et $E'$ deux $\Gamma_g$-modules et $b$ un accouplement parfait $\Gamma_g$-invariant sur $E \times E'$. L'accouplement défini par $b$ sur $H^1(\Gamma_g; E) \times H^1(\Gamma_g; E')$ est alors parfait.*

**Lemme 16.** *Soient $p$ et $q$ deux entiers et soit $b$ un accouplement parfait entre deux espaces vectoriels $F$ et $F'$ de dimension plus grande que $p+q$.*

*Pour toute matrice $(a_{i,j})_{i\leq p, j\leq q}$, l'ensemble des $(p+q)$-uplets $(v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q)$ de $F^p \times F'^q$ tels que :*
*– les $(v_i)$ sont libres, les $(w_j)$ sont libres,*
*– et pour tous $i, j$, $b(v_i, w_j) = a_{i,j}$,*
*est non vide et connexe par arcs.*

On appliquera ce lemme à $F = H^1(\Gamma_g; \mathrm{Hom}(V_j^{\prime,\sigma}, V_i^{\prime,\sigma}))$ et $F' = H^1(\Gamma_g; \mathrm{Hom}(V_i^{\prime,\sigma}, V_j^{\prime,\sigma}))$.

Nous concluons cette partie en montrant comment cette dernière proposition 12 implique le théorème 1.

Notons $Q^{(\mathrm{A})}$ le sous-ensemble du cône quadratique $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}))$ vérifiant le critère (A). Cet ensemble $Q^{(\mathrm{A})}$ est localement connexe par arcs, fibre sur un espace vectoriel et chaque fibre est non vide et connexe par arcs. Ceci implique que $Q^{(\mathrm{A})}$ est connexe par arcs.

De plus $Q^{(\mathrm{A})}$ est dense dans $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}))$ car il est dense dans chaque fibre. Si on note $Q^{\mathrm{irr}}$ l'ouvert de $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}))$ correspondant aux représentations irréductibles, alors on a les inclusions $Q^{(\mathrm{A})} \subset Q^{\mathrm{irr}} \subset Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}))$. La densité de $Q^{(\mathrm{A})}$ et sa connexité donnent alors la connexité par arcs de l'ouvert $Q^{\mathrm{irr}}$.

Ceci termine la démonstration du théorème 1 sous l'hypothèse que la représentation,dont on étudie les voisinages, est semi-simple et que tous ses facteurs sont absolument simples.

*Remarque.* Nous avons montré la connexité de $Q^{(\mathrm{A})}$, alors qu'il fallait démontrer la connexité de $Q^{(\mathrm{A})}$ pour une base de voisinages de 0 dans $Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}))$. Comme tous ces ensembles sont stables par homothéties, la connexité de $Q^{(\mathrm{A})}$ implique la connexité d'un voisinage étoilé de 0 et il suffit de prendre une base de voisinages étoilés tous contenus dans l'ouvert $V$ de la proposition 8.

## 6. Cas général

Nous traitons dans cette partie le cas d'une représentation semi-simple quelconque. La principale difficulté réside dans la multiplicité des situations à traiter due aux différents centralisateurs pouvant apparaître.

Nous concluons cette partie en examinant le cas d'une représentation qui n'est pas nécessairement semi-simple et par une généralisation du théorème 1.

6.1. **Coordonnées et équations.** A nouveau, il nous faut décrire l'ensemble :
$$Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R})) - \bigcup H^1(\Gamma_g, \mathfrak{p})$$
où la réunion est sur tous les paraboliques maximaux stables par $\Gamma_g$.

Si on décompose comme précédemment le $\Gamma_g$-module $V = \mathbf{R}^n$ comme une somme de $\Gamma_g$-modules simples
$$V = \bigoplus V_i, \quad V_i \simeq (V_i')^{n_i} = V_i^1 \oplus \cdots \oplus V_i^{n_i}$$
où les $(V_i')$ sont des $\Gamma_g$-modules *réels* simples, on obtient des décompositions similaires pour les cocycles
$$u = (u_{ij}^{kl}) \in H^1(\Gamma_g, \mathfrak{gl}_n(\mathbf{R})) = \bigoplus_{i,j} \bigoplus_{k,l} H^1(\Gamma_g, \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_j^l, V_i^k)).$$
Les équations à vérifier pour que $u$ soit dans le cône $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}))$ se résument à : pour tout $i$, pour tous $k_0, l_0 \leq n_i$ et pour tout $z$ dans $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(V_i')^{\Gamma_g}$
$$\sum_j \sum_{l \leq n_j} \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} z u_{ij}^{l_0 l} u_{ji}^{l k_0} = 0.$$
Ici, par linéarité, il suffit bien sûr de vérifier ces équations pour une base de $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(V_i')^{\Gamma_g}$. Ce dernier est isomorphe à $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{H}$. On fixe donc, pour tout $j$, une base $(z_j^\alpha)$ de $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(V_j')^{\Gamma_g}$ qui est l'élément 1 si $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(V_j')^{\Gamma_g}$ est isomorphe à $\mathbf{R}$, qui est la base $(1, i)$ si c'est $\mathbf{C}$ et la base $(1, i, j, k)$ si c'est $\mathbf{H}$, avec les relations habituelles entre les éléments $i, j, k$.

L'application $\Pi$ de $H^1(\Gamma_g, \mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}))$ dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel envoie ici un cocycle $u$ sur la famille $(\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} a_i^\alpha u_{ij}^{l_0 l} u_{ji}^{k k_0})$ et $u$ appartient au cône $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}))$ si, et seulement si, $\Pi(u)$ appartient au sous-espace vectoriel défini par les équations ci-dessus et par des conditions de symétrie qui apparaîtront plus loin.

Comme dans la partie précédente, nous allons voir que la restriction de $\Pi$ à $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}))$ est surjective sur cet espace vectoriel et que, dans chaque fibre, l'ensemble des cocycles satisfaisant le critère (A) est dense et connexe par arcs. Ce qui permet de conclure le théorème.

Nous n'énoncerons pass l'équivalent de la proposition 12 dans ce cas précis mais nous détaillerons uniquement les lemmes intermédiaires convenables qui permettent de conclure.

Il reste donc à étudier les familles $(u_{ij}^{kl})_{k \leq n_i, l \leq n_j}$ et les valeurs possibles des deux matrices
$$(\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} z_i^\alpha u_{ij}^{kl} u_{ji}^{l'k'}) \text{ et } (\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} z_j^\alpha u_{ji}^{l'k'} u_{ij}^{kl})$$
et les liens entre leurs coefficients. Nous traitons successivement les cas $i = j$ et $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(V_i')^{\Gamma_g}$ isomorphe à $\mathbf{R}, \mathbf{C}$ ou $\mathbf{H}$ puis $i \neq j$ et les six possibilités pour les deux centralisateurs $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(V_i')^{\Gamma_g}, \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(V_j')^{\Gamma_g}$.

6.2. **premier cas, $i = j$, $\mathbf{End}_{\mathbf{R}}(V_i')^{\Gamma_g} = \mathbf{R}$.** Ceci signifie que la représentation $V_i'$ est absolument simple. Ce cas a déjà été traité dans la partie précédente.

6.3. **cas deux, $i = j$, $\mathbf{End}_{\mathbf{R}}(V_i')^{\Gamma_g} = \mathbf{C}$.** Ceci signifie que le module $V_i'$ a une structure complexe, on notera par $I$ la multiplication par $i$. La base $(z_i^\alpha)$ de $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(V_i')^{\Gamma_g}$ est donc $(\mathrm{id}, I)$. Tout endomorphisme $e$ de $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(V_i')$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un endomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire et d'un endomorphisme $\mathbf{C}$-antilinéaire

$$e = {}^1e + {}^{-1}e.$$

Autrement dit, ${}^1e$ commute avec $I$ et ${}^{-1}e$ anticommute avec $I$. De même tout cocycle $u$ s'écrit comme ${}^1u + {}^{-1}u$, ceci vaut donc pour la famille $(u_{ii}^{kl})_{k,l}$.

Par ailleurs, si ${}^1e$ est un endomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire et ${}^{-1}f$ est un endomorphisme $\mathbf{C}$-antilinéaire

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{\mathbf{R}}({}^1e)({}^{-1}f) &= -\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I^2({}^1e)({}^{-1}f) = -\mathrm{tr}_{\mathbf{R}}({}^1e)I({}^{-1}f)I \\ &= \mathrm{tr}_{\mathbf{R}}({}^1e)I^2({}^{-1}f) = -\mathrm{tr}_{\mathbf{R}}({}^1e)({}^{-1}f) = 0.\end{aligned}$$

Donc, pour les cocycles

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} u_{ii}^{kl} u_{ii}^{k'l'} &= \mathrm{tr}_{\mathbf{R}}({}^1u_{ii}^{kl})({}^1u_{ii}^{k'l'}) + \mathrm{tr}_{\mathbf{R}}({}^{-1}u_{ii}^{kl})({}^{-1}u_{ii}^{k'l'}) \\ \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I u_{ii}^{kl} u_{ii}^{k'l'} &= \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I({}^1u_{ii}^{kl})({}^1u_{ii}^{k'l'}) + \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I({}^{-1}u_{ii}^{kl})({}^{-1}u_{ii}^{k'l'}).\end{aligned}$$

On remarque que les endomorphismes dont on prend la trace, $({}^1u_{ii}^{kl})({}^1u_{ii}^{k'l'})$, $({}^{-1}u_{ii}^{kl})({}^{-1}u_{ii}^{k'l'})$, … sont $\mathbf{C}$-linéaires. On peut donc considérer les quantités

$$\mathbf{tr}_{\mathbf{C}}({}^1u_{ii}^{kl})({}^1u_{ii}^{k'l'}) \text{ et } \mathbf{tr}_{\mathbf{C}}({}^{-1}u_{ii}^{kl})({}^{-1}u_{ii}^{k'l'})$$

qui sont donc des éléments de $H^2(\Gamma_g, \mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}$. Mais le lien entre la trace sur $\mathbf{C}$ et la trace sur $\mathbf{R}$ est facile, si $e$ est un endomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire

$$\mathrm{tr}_{\mathbf{C}} e = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} e - \frac{i}{2}\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I e.$$

Il revient ainsi au même d'étudier les valeurs prises par les deux matrices

$$\left(\mathbf{tr}_{\mathbf{C}}({}^1u_{ii}^{kl})({}^1u_{ii}^{k'l'})\right)_{\substack{k,l\le n_i\\ k',l'\le n_i}} \text{ et } \left(\mathbf{tr}_{\mathbf{C}}({}^{-1}u_{ii}^{kl})({}^{-1}u_{ii}^{k'l'})\right)_{\substack{k,l\le n_i\\ k',l'\le n_i}}.$$

Notons $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{C}}}(V_i')$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des endomorphismes $\mathbf{C}$-antilinéaires de $V_i'$.

**Lemme 17.**
– *L'accouplement, noté* $\mathbf{tr}_{\mathbf{C}}$*, défini par la trace sur* $H^1(\Gamma_g, \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V_i'))$ *est non-dégénéré et antisymétrique.*
– *L'accouplement, noté aussi* $\mathbf{tr}_{\mathbf{C}}$*, sur* $H^1(\Gamma_g, \mathrm{End}_{\overline{\mathbf{C}}}(V_i'))$ *est non-dégénéré et antihermitien.*

Ce lemme est encore conséquence de la dualité de Poincaré, les symétries viennent du fait que la trace est symétrique sur $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V_i')$ et hermitienne sur $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{C}}}(V_i')$. Ceci implique que la première matrice plus haut est antisymétrique et la seconde est antihermitienne.

Aussi la condition d'indépendance linéaire (critère (A)) se traite en remarquant que, pour tout $(\lambda^{kl}) \in \mathbf{R}^{n_i^2}$

$$\sum \lambda^{kl} u_{ii}^{kl} = 0 \Longleftrightarrow \sum \lambda^{kl}({}^1u_{ii}^{kl}) = 0 \text{ et } \sum \lambda^{kl}({}^{-1}u_{ii}^{kl}) = 0.$$

On va donc préférer la condition plus forte : la famille $({}^1u_{ii}^{kl})$ est linéairement indépendante sur $\mathbf{C}$, mais on continuera à appeler «critère (A)» la condition suffisante pour qu'un cocycle soit l'image d'une représentation irréductible.

Les lemmes algébriques qui règlent ce cas sont les suivants.

**Lemme 18.** *Soit $m$ un entier fixé. Soit aussi $F$ un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension plus grande que $2m$ et muni d'une d'une forme $\omega$ antisymétrique non-dégénérée. Alors pour toute matrice antisymétrique $(a_{ij})_{i,j\leq m}$, l'ensemble des $m$-uplets*
$$\{(v_i)\in F^m \mid (v_i) \text{ est libre}, \omega(v_i,v_j)=a_{ij}\}$$
*est connexe par arcs et est dense dans l'ensemble*
$$\{(v_i)\in F^m \mid \omega(v_i,v_j)=a_{ij}\}.$$

**Lemme 19.** *Soit $m$ fixé et $F$ un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension plus grande que $2m$ muni d'une forme $\overline{\omega}$ antihermitienne non-dégénérée. Alors, pour toute matrice antihermitienne $(a_{ij})_{i,j\leq m}$, l'ensemble*
$$\{(v_i)\in F^m \mid \overline{\omega}(v_i,v_j)=a_{ij}\}$$
*est connexe par arcs.*

Le reste de cette partie consistera surtout à indiquer quels sont les changements de variables à mettre en œuvre pour appliquer la stratégie que l'on s'est donnée. Ici la famille $(u_{ii}^{kl})$ est remplacée par les deux familles $({}^1u_{ii}^{kl})$ et $({}^{-1}u_{ii}^{kl})$.

6.4. **Cas trois, $i=j$ et $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(V_i')^{\Gamma_g}\simeq\mathbf{H}$.** On écrira $I$, $J$ des $\Gamma_g$-endomorphismes de $V_i'$ avec les relations
$$I^2=J^2=-\mathrm{id} \text{ et } IJ=-JI.$$

On a à décrire l'ensemble des valeurs prises par
$$\mathrm{tr}_{\mathbf{R}}u_{ii}^{kl}u_{ii}^{k'l'}, \mathrm{tr}_{\mathbf{R}}Iu_{ii}^{kl}u_{ii}^{k'l'}, \mathrm{tr}_{\mathbf{R}}Ju_{ii}^{kl}u_{ii}^{k'l'} \text{ et } \mathrm{tr}_{\mathbf{R}}IJu_{ii}^{kl}u_{ii}^{k'l'}.$$
Ici, tout élément $e$ de $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(V_i')$ s'écrit de manière unique
$$e=({}^{1,1}e)+I({}^{1,-1}e)+J({}^{-1,1}e)+IJ({}^{-1,-1}e)$$
où les ${}^{\varepsilon,\varepsilon'}e$ sont $\mathbf{H}$-linéaires.

Aussi la formule
$$\mathrm{tr}_{\mathbf{R}}ef=\mathrm{tr}_{\mathbf{R}}({}^{1,1}e)({}^{1,1}f)-\mathrm{tr}_{\mathbf{R}}({}^{1,-1}e)({}^{1,-1}f)-\mathrm{tr}_{\mathbf{R}}({}^{-1,1}e)({}^{-1,1}f)-\mathrm{tr}_{\mathbf{R}}({}^{-1,-1}e)({}^{-1,-1}f)$$
et les égalités qui s'en déduisent pour $\mathrm{tr}_{\mathbf{R}}Ief$,... nous permettent de ne considérer que la matrice antisymétrique réelle de taille $(4n_i)^2\times(4n_i)^2$
$$\left(\mathrm{tr}_{\mathbf{R}}({}^{\varepsilon,\varepsilon'}u_{ii}^{kl})({}^{\eta,\eta'}u_{ii}^{k'l'})\right)_{\substack{\varepsilon,\varepsilon'=\pm1,k,l\leq n_i\\ \eta,\eta'=\pm1,k',l'\leq n_i}}.$$
Comme plus haut, si le genre $g$ est assez grand, l'ensemble décrit par ces matrices est égale à l'ensemble des matrices antisymétriques et si $A$ est une matrice antisymétrique fixée alors l'ensemble des $(4n_i)^2$-uplets $({}^{\varepsilon,\varepsilon'}u_{ii}^{kl})$ de $H^1(\Gamma_g,\mathrm{End}_{\mathbf{H}}(V_i'))$ linéairement indépendants et tel que $A$ est la matrice ci-dessus est connexe par arcs et est dense dans l'ensemble des $(4n_i)^2$-uplets possibles. La condition explicite sur le genre est ici
$$(2g-2)\dim_{\mathbf{R}}\mathrm{End}_{\mathbf{H}}(V_i')\geq 2\cdot(4n_i^2)$$

et, comme la dimension $\dim_{\mathbf{R}} \mathrm{End}_{\mathbf{H}}(V_i')$ est toujours un multiple de quatre, l'inégalité $g-1 \geq n_i^2$ est suffisante.

6.5. **Cas quatre, $i \neq j$ et $\mathbf{End}_{\mathbf{R}}(V_i')^{\Gamma_g} \simeq \mathbf{End}_{\mathbf{R}}(V_j')^{\Gamma_g}$.** Les calculs se font comme pour les trois premiers cas $i=j$ sauf qu'il n'y a plus de considération de symétrie à prendre en compte.

6.6. **cas cinq, $i \neq j$, $\mathbf{End}_{\mathbf{R}}(V_i')^{\Gamma_g} \simeq \mathbf{R}$ et $\mathbf{End}_{\mathbf{R}}(V_j')^{\Gamma_g} \simeq \mathbf{C}$.** Il y a dans ce cas deux quantités à considérer

$$(\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} u_{ji}^{l'k'} u_{ij}^{kl}) \text{ et } (\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I u_{ji}^{l'k'} u_{ij}^{kl})$$

avec $u_{ij}^{kl}$ dans $H^1(\Gamma_g, \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_j', V_i'))$ et $u_{ji}^{l'k'}$ dans $H^1(\Gamma_g, \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_i', V_j'))$. Ici ces deux groupes de cohomologie ont une structure supplémentaire de $\mathbf{C}$-espace vectoriel et les différentes formes bilinéaires vont se résumer à une seule forme complexe.

En effet, les deux isomorphismes de $\Gamma_g$-modules

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V_i' \otimes \mathbf{C}, V_j') &\xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_i', V_j') \\ \phi &\longmapsto \phi_{|V_i'} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V_j', V_i' \otimes \mathbf{C}) &\xrightarrow{\Re} \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_j', V_i') \\ \psi &\longmapsto \Re\psi \end{aligned}$$

induisent des isomorphismes

$$\begin{aligned} H^1(\Gamma_g, \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V_i' \otimes \mathbf{C}, V_j')) &\xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(\Gamma_g, \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_i', V_j')) \\ H^1(\Gamma_g, \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V_j', V_i' \otimes \mathbf{C})) &\xrightarrow{\Re} H^1(\Gamma_g, \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_j', V_i')). \end{aligned}$$

Ce qui permet de considérer $u_{ij}^{kl}$ comme appartenant à $H^1(\Gamma_g, \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V_j', V_i' \otimes \mathbf{C}))$ et $u_{ji}^{l'k'}$ dans $H^1(\Gamma_g, \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V_i' \otimes \mathbf{C}, V_j'))$. En ces termes les deux quantités plus haut s'écrivent

$$(\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} \mathrm{Res}(u_{ji}^{l'k'}) \Re(u_{ij}^{kl})) \text{ et } (\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I \mathrm{Res}(u_{ji}^{l'k'}) \Re(u_{ij}^{kl})).$$

Mais si $\phi$ appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V_i' \otimes \mathbf{C}, V_j)$ et $\psi$ à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V_j', V_i \otimes \mathbf{C})$, l'égalité suivante est facile

$$\mathrm{tr}_{\mathbf{C}} \phi\psi = \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} \mathrm{Res}\phi \Re\psi - i \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I \mathrm{Res}\phi \Re\psi,$$

et la même relation vaut aussi pour les cocycles.

On conclut de la manière habituelle : si le genre $g$ est assez grand (plus grand que $n_i n_j + 1$) alors l'ensemble des $\left(\mathbf{tr}_{\mathbf{C}} u_{ji}^{l'k'} u_{ij}^{kl}\right)_{\substack{k \leq n_i, l \leq n_j \\ k' \leq n_i, l' \leq n_j}}$ possibles est l'ensemble des matrices complexes carrées de taille $n_i n_j$ et dans chaque fibre les familles de cocycles linéairement indépendants (sur $\mathbf{C}$) forment un ensemble connexe par arcs et dense.

6.7. **Cas six, $i \neq j$, $\mathbf{End}_{\mathbf{R}}(V_i')^{\Gamma_g} \simeq \mathbf{R}$ et $\mathbf{End}_{\mathbf{R}}(V_j')^{\Gamma_g} \simeq \mathbf{H}$.** La situation est très similaire au cas précédent à ceci près que la non-commutativité de $\mathbf{H}$ oblige à préciser les structures de $\mathbf{H}$-modules.

Il y a ici quatre formes réelles en jeu

$$(\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} u_{ij}^{kl} u_{ji}^{l'k'}), (\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} u_{ij}^{kl} I u_{ji}^{l'k'}), (\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} u_{ij}^{kl} J u_{ji}^{l'k'}) \text{ et } (\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} u_{ij}^{kl} IJ u_{ji}^{l'k'})$$

Les deux isomorphismes de $\Gamma_g$-modules

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(V_i' \otimes \mathbf{H}, V_j') &\xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_i', V_j') \\ \phi &\longmapsto \phi_{|V_i'} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(V_j', V_i' \otimes \mathbf{H}) &\xrightarrow{\Re} \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_j', V_i') \\ \phi &\longmapsto \Re\phi \end{aligned}$$

induisent des isomorphismes équivalents pour les groupes de cohomologie. Le produit tensoriel $V_i' \otimes \mathbf{H}$ a une structure de bi-$\mathbf{H}$-module et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}$ désigne l'ensemble des endomorphismes $\mathbf{H}$-linéaires pour les structures à gauche.

La structure supplémentaire de $\mathbf{H}$-module à droite sur $V_i' \otimes \mathbf{H}$ infère une structure de $\mathbf{H}$-module à gauche sur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(V_i' \otimes \mathbf{H}, V_j')$ et une structure de $\mathbf{H}$-module à droite sur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(V_j', V_i' \otimes \mathbf{H})$. Ainsi $H^1(\Gamma_g, \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(V_i' \otimes \mathbf{H}, V_j'))$ hérite d'une structure de $\mathbf{H}$-module à gauche et $H^1(\Gamma_g, \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(V_j', V_i' \otimes \mathbf{H}))$ d'une structure de $\mathbf{H}$-module à droite.

Si $(e_\alpha)$ est une base du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $V_i'$, c'est aussi une base sur $\mathbf{H}$ de $V_i' \otimes \mathbf{H}$. Pour tout $\phi$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(V_i' \otimes \mathbf{H})$, l'élément $\phi(e_\alpha)$ s'écrit $\sum \phi_{\beta\alpha} e_\beta$ avec, pout tout $\beta$, $\phi_{\beta\alpha} \in \mathbf{H}$. On pose alors

$$\mathrm{tr}_{\mathbf{H}} \phi = \sum \phi_{\alpha\alpha} \in \mathbf{H}.$$

Cette trace ne dépend pas de la base de $V_i'$. Notons qu'en général, une telle trace n'existe pas pour les endomorphismes $\mathbf{H}$-linéaires, ici la structure réelle sous-jacente est essentielle.

On peut alors utiliser $\mathrm{tr}_{\mathbf{H}}$ pour définir un accouplement non-dégénéré

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(V_j', V_i' \otimes \mathbf{H}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(V_i' \otimes \mathbf{H}, V_j') &\longrightarrow \mathbf{H} \\ (\phi, \psi) &\longmapsto \mathrm{tr}_{\mathbf{H}} \phi\psi. \end{aligned}$$

Cet accouplement vérifie l'identité, avec les notations plus haut,

$$\mathrm{tr}_{\mathbf{H}} \phi\psi = \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} (\Re\phi)(\mathrm{Res}\psi) - i \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} (\Re\phi) I (\mathrm{Res}\psi) - j \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} (\Re\phi) J (\mathrm{Res}\psi) - ij \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} (\Re\phi) IJ (\mathrm{Res}\psi).$$

L'accouplement $\mathbf{tr}_{\mathbf{H}}$ entre $H^1(\Gamma_g, \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(V_j', V_i' \otimes \mathbf{H}))$ et $H^1(\Gamma_g, \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(V_i' \otimes \mathbf{H}, V_j'))$ est linéaire en chaque variable et est aussi non-dégénéré. Les mêmes conclusions valent aussi dans ce cas : si $g-1 \geq n_i n_j$, $(\mathbf{tr}_{\mathbf{H}} u_{ij}^{kl} u_{ji}^{l'k'})$ décrit l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans $\mathbf{H}$ et dans chaque fibre les cocycles linéairement indépendants (sur $\mathbf{H}$) sont denses et connexes par arcs.

6.8. **Cas sept, $i \neq j$, $\mathbf{End}_{\mathbf{R}}(V_i')^{\Gamma_g} \simeq \mathbf{C}$ et $\mathbf{End}_{\mathbf{R}}(V_j')^{\Gamma_g} \simeq \mathbf{H}$.** Notons $(1, I_i)$ une $\mathbf{R}$-base de $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(V_i')^{\Gamma_g}$ avec $I_i^2 = -\mathrm{id}$ et $(1, I_j, J_j, I_j J_j)$ une base de $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(V_j')^{\Gamma_g}$ avec les relations habituelles entre $I_j$ et $J_j$.

Les cocycles $(u_{ij}^{kl})$ de $H^1(\Gamma_g, \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_j', V_i'))$ et $(u_{ji}^{l'k'})$ de $H^1(\Gamma_g, \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_i', V_j'))$ sont impliquées dans les cinq formes bilinéaires suivantes

$$\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} u_{ji}^{l'k'} u_{ij}^{kl}, \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} u_{ji}^{l'k'} I_i u_{ij}^{kl}, \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I_j u_{ji}^{l'k'} u_{ij}^{kl}, \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} J_j u_{ji}^{l'k'} u_{ij}^{kl} \text{ et } \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I_j J_j u_{ji}^{l'k'} u_{ij}^{kl}.$$

Comme $V'_i$ et $V'_j$ ont une structure complexe —celle de $V'_j$ est par exemple fixée par $I_j$— les deux espaces $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V'_i, V'_j)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V'_j, V'_i)$ se décomposent comme la somme des applications $\mathbf{C}$-linéaires et des applications $\mathbf{C}$-antilinéaires. Et même, en utilisant le fait que $J_j$ est $\mathbf{C}$-antilinéaire, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V'_i, V'_j) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V'_i, V'_j) \oplus J_j \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V'_i, V'_j)$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V'_j, V'_i) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V'_j, V'_i) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V'_j, V'_i) J_j$$

c'est-à-dire tout élément $u$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V'_i, V'_j)$ s'écrit de manière unique $u = {}^1u + J_j({}^{-1}u)$ avec ${}^{\pm 1}u$ $\mathbf{C}$-linéaire et pareillement pour les éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V'_j, V'_i)$.

On récupère des décompositions équivalentes au niveau des groupes de cohomologie

$$u_{ij}^{kl} = {}^1u_{ij}^{kl} + {}^{-1}u_{ij}^{kl} J_j, \ \ u_{ji}^{l'k'} = {}^1u_{ji}^{l'k'} + J_j({}^{-1}u_{ji}^{l'k'}).$$

Les traces deviennent maintenant

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} u_{ij}^{kl} u_{ji}^{l'k'} &= \mathrm{tr}_{\mathbf{R}}({}^1u_{ij}^{kl})({}^1u_{ji}^{l'k'}) - \mathrm{tr}_{\mathbf{R}}({}^{-1}u_{ij}^{kl})({}^{-1}u_{ji}^{l'k'}) \\
\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I_i u_{ij}^{kl} u_{ji}^{l'k'} &= \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I_i({}^1u_{ij}^{kl})({}^1u_{ji}^{l'k'}) - \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I_i({}^{-1}u_{ij}^{kl})({}^{-1}u_{ji}^{l'k'}) \\
\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I_j u_{ji}^{l'k'} u_{ij}^{kl} &= \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I_j({}^1u_{ji}^{l'k'})({}^1u_{ij}^{kl}) - \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I_j({}^{-1}u_{ji}^{l'k'})({}^{-1}u_{ij}^{kl}) \\
&= -\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I_i({}^1u_{ij}^{kl})({}^1u_{ji}^{l'k'}) - \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I_i({}^{-1}u_{ij}^{kl})({}^{-1}u_{ji}^{l'k'}) \\
\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} J_j u_{ji}^{l'k'} u_{ij}^{kl} &= -\mathrm{tr}_{\mathbf{R}}({}^1u_{ji}^{l'k'})({}^{-1}u_{ij}^{kl}) - \mathrm{tr}_{\mathbf{R}}({}^{-1}u_{ji}^{l'k'})({}^1u_{ij}^{kl}) \\
&= \mathrm{tr}_{\mathbf{R}}({}^1u_{ij}^{kl})({}^{-1}u_{ji}^{l'k'}) - \mathrm{tr}_{\mathbf{R}}({}^{-1}u_{ij}^{kl})({}^1u_{ji}^{l'k'}) \\
\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I_j J_j u_{ji}^{l'k'} u_{ij}^{kl} &= -\mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I_j({}^1u_{ji}^{l'k'})({}^{-1}u_{ij}^{kl}) - \mathrm{tr}_{\mathbf{R}} I_j({}^{-1}u_{ji}^{l'k'})({}^1u_{ij}^{kl}).
\end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver quelles peuvent être les matrices carrées complexes de taille $2n_in_j$ de la forme

$$(\mathbf{tr}_{\mathbf{C}}({}^{\varepsilon}u_{ij}^{kl})({}^{\varepsilon'}u_{ji}^{l'k'})).$$

Si le genre $g$ est assez grand, toutes les matrices peuvent apparaître et dans les fibres la densité et la connexité des $2n_in_j$-uplets de cocycles linéairement indépendants sont valables.

Explicitons encore ici la minoration sur le genre : il suffit que

$$(2g-2)\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V'_i, V'_j) \geq 2 \cdot (2n_in_j)$$

et comme $\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V'_i, V'_j)$ est paire dans ce cas car $V'_j$ a une structure quaternionique, $g \geq n_in_j + 1$ suffit aussi dans ce cas.

6.9. **Conclusion.** Si le genre $g$ est plus grand que $n^2+1$, alors l'application $\Pi$ (voir paragraphe 6.1) restreinte à $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}))$ est surjective sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et dans chaque fibre l'ensemble des cocycles satisfaisant le critère (A) est dense et connexe par arcs.

6.10. **Le cas d'une représentation quelconque.** Nous avons jusqu'à présent donné une description explicite du voisinage d'une représentation semi-simple qui nous a permis de conclure le théorème 1 sous cette hypothèse supplémentaire.

Passons à une représentation quelconque $\rho$. L'adhérence de l'orbite $\overline{\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cdot \rho}$ contient des représentations semi-simples (cela peut se voir en se plaçant dans une base où, pour tout $\gamma$, $\rho(\gamma)$ est triangulaire supérieure par blocs et en conjuguant par des matrices diagonales). Soit $\rho_0$ une de ces représentations semi-simples. D'après la proposition 8 il existe un voisinage $U$ de $\rho_0$ et qui est analytiquement isomorphe au produit de $B^1(\Gamma_g, \mathfrak{gl}_n(\mathbf{R})_{\mathrm{Ad}\circ\rho_0})$ et du cône quadratique $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}))$ de $H^1(\Gamma_g, \mathfrak{gl}_n(\mathbf{R})_{\mathrm{Ad}\circ\rho_0})$ donné par l'équation $[u, u] = 0$.

Par hypothèse, il existe un élément $g$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ tel que $g \cdot \rho$ est dans $U$. L'invariance des propriétés énoncées par conjugaison nous amène à montrer les conclusions du théorème pour $g \cdot \rho$. On obtient immédiatement un voisinage de $g \cdot \rho$ qui vérifie les conclusions de ce théorème, voyons comment obtenir une base de voisinages. Ceci se traduit dans les coordonnées analytiques sur $U$ de la manière suivante : pour tout $v$ dans $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}))$ il existe une base de voisinages de $v$ telle que, pour chacun de ces voisinages $\mathcal{V}$, le sous ensemble

$$\{u \in \mathcal{V} \mid \text{pour tout } \mathfrak{p}\ \Gamma_g\text{-stable, } u \notin H^1(\Gamma_g, \mathfrak{p})\}$$

est dense dans $\mathcal{V}$ et est connexe par arcs.

En adoptant la même conduite que pour le cas semi-simple, on se restreint à montrer que l'ensemble

$$\{u \in \mathcal{V} \mid u = (u_{ij}^{kl}) \text{ satisfait le critère (A)}\}$$

vérifie les mêmes propriétés.

Et comme pour le cas semi-simple, ce résultat va découler d'une série de lemmes adaptés à cette nouvelle situation. Citons-en un seul pour mettre en évidence le genre de calculs utilisés.

**Lemme 20.** *Soit $N \geq m$ deux entiers et $(E, \omega)$ un espace vectoriel réel de dimension $2N$ muni d'une forme symplectique non-dégénérée, alors pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ de $E^m$, il existe un $\varepsilon_0 > 0$ et un $\kappa > 0$ tels que, pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ et pour toute matrice antisymétrique $(b_{ij})_{i,j \leq m}$ vérifiant*

$$\text{pour tous } i, j,\ |b_{ij} - \omega(\alpha_i, \alpha_j)| < \varepsilon,$$

*l'ensemble*

$$\{(\beta_i)_{1 \leq i \leq m} \in E^m \mid (\beta_i) \text{ libre}, \|\beta_i - \alpha_i\| \leq \kappa\varepsilon, \omega(\beta_i, \beta_j) = b_{ij}\}$$

*est connexe par arcs.*

Notons que les propriétés de densité résultent facilement des résultats démontrés jusque là, c'est pour cela que le lemme ne contient que la conclusion sur la connexité.

**Démonstration** : La norme $\| \cdot \|$ dans le résultat n'est pas quelconque, mais ceci n'a pas d'incidence sur les propriétés que l'on souhaite démontrer.

Supposons également que la famille $(\alpha_i)$ engendre un sous-espace vectoriel de rang pair $2k$ (le cas impair se traite de manière similaire). Quitte à changer la famille $(\alpha_i)$ par une famille

$$\tilde{\alpha}_i = \sum \lambda_{ij} \alpha_j$$

où $(\lambda_{ij})_{i,j \leq m}$ est une matrice inversible, on se ramène facilement à la situation suivante :

$(E, \omega)$ est $\mathbf{R}^{2N}$ muni de la forme symplectique standard

$$\omega(x,y)=\sum_{i=1}^{N} x_{2i-1}y_{2i}-x_{2i}y_{2i-1}$$

et si l'on note $(e_i)_{i\leq 2N}$ la base canonique de $\mathbf{R}^{2N}$, alors

$$\alpha_i=e_i \text{ pour } i\leq 2k,\ \alpha_i=0 \text{ si } i>2k.$$

Écrivons $(\mathbf{R}^{2N},\omega)$ comme le produit $(\mathbf{R}^{2k}\times\mathbf{R}^{2l},\omega_1\times\omega_2)$ avec $k+l=N$ et $\omega_1$, $\omega_2$ les formes symplectiques standards sur $\mathbf{R}^{2k}$ et $\mathbf{R}^{2l}$. Un élément $x$ de $\mathbf{R}^{2N}$ est ainsi un couple

$$x=(x^1,x^2)$$

et la forme $\omega$ devient

$$\omega(x,y)=\omega_1(x^1,y^1)+\omega_2(x^2,y^2)$$

Soit maintenant $\beta_i=\alpha_i+\gamma_i$ une famille de vecteurs. Il existe alors un $\varepsilon_0$ tel que si $\|\gamma_i\|<\varepsilon_0$ pour tout $i\leq 2k$, on a l'équivalence

$$(\beta_i)_{i=1,\dots,m} \text{ est libre} \Longleftrightarrow (\gamma_i)_{i=2k+1,\dots,m} \text{ est libre.}$$

Si $(b_{ij})$ est une matrice antisymétrique, la condition voulue sur les $(\beta_i)$ est

$$\begin{aligned} b_{ij}&=\omega(\beta_i,\beta_j)\\ &=\omega_1(\alpha_i,\alpha_j)+\omega_1(\alpha_i,\gamma_j^1)+\omega_1(\gamma_i^1,\alpha_j)+\omega_2(\gamma_i^2,\gamma_j^2). \end{aligned}$$

La connexité résulte alors de la connexité des ensembles

$$\left\{(\gamma_i)\in(\mathbf{R}^{2N})^m \mid \begin{array}{l} (\gamma_i)_{i=2k+1,\dots,m} \text{ libre, pour tout } i,j, \|\gamma_i^1\|<\varepsilon, \|\gamma_i^2\|<\varepsilon, \\ \omega_2(\gamma_i^2,\gamma_j^2)=b_{ij}-\omega_1(\alpha_i,\alpha_j)-\omega_1(\alpha_i,\gamma_j^1)-\omega_1(\gamma_i^1,\alpha_j) \end{array}\right\}$$

pour $\varepsilon$ assez petit. Ce qui suit d'une petite amélioration du lemme 14 appliqué à $(\mathbf{R}^{2l},\omega_2)$ et à la famille $(\gamma_i^2)$. □

6.11. **Une généralisation.** Les mêmes techniques que celles utilisées jusqu'à présent permettent de montrer la généralisation suivante du théorème 1 :

**Théorème 21.** *Soit $n$ un entier fixé et $g$ assez grand (en fonction de $n$). Si une représentation semi-simple $\rho$ de $\Gamma_g$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ vérifie de plus que l'adhérence de Zariski de $\rho(\Gamma_g)$ est connexe, alors, pour tout sous-groupe d'indice fini $\Gamma_h\subset\Gamma_g$, il existe un voisinage $U_\rho$ de $\rho$ tel que l'ensemble*

$$\{\rho'\in U_\rho \mid \rho'_{|\Gamma_h} \text{ est irréductible}\}$$

*est dense dans $U_\rho$ et est connexe par arcs.*

*Remarques.* – Comme pour le théorème 1, $g$ plus grand que $n^2+1$ suffit.
- Bien sûr, la conclusion avec une base de voisinages est aussi vraie.
- L'hypothèse sur la connexité au sens de Zariski de $\rho(\Gamma_g)$ n'est pas optimale. Cependant sans cette hypothèse l'un des facteurs simples pour $\Gamma_g$ pourrait ne plus être simple en tant que $\Gamma_h$-module. L'auteur n'a pas réussi à mener les calculs dans cette généralité.

**Démonstration** : Notons $V=\mathbf{R}^n$. Le $\Gamma_g$-module $V\otimes\mathbf{C}$ se décompose alors comme une somme $V_1\oplus\cdots\oplus V_m$ et, pour tout $i$, $V_i\simeq(V_i')^{n_i}$ avec $V_1',\dots,V_m'$ des représentations irréductibles distinctes de $\Gamma_g$.

L'hypothèse de connexité au sens de Zariski implique que $V_i'$ est aussi un $\Gamma_h$-module irréductible. De plus les arguments généraux de restriction/corestriction ([19] I.2.4) montrent alors que, pour tout $(i,j)$

$$H^1(\Gamma_g; \mathrm{Hom}(V_j', V_i')) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(\Gamma_h; \mathrm{Hom}(V_j', V_i'))$$

est injective. Ainsi, toujours avec $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R})) = \{u \in H^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{R})) \mid [u,u] = 0\}$,

$$\{u \in Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R})) \mid \mathrm{Res}(u) \in H^1(\Gamma_h; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{R})) \text{ vérifie (A)}\} = \{u \in Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R})) \mid u \text{ vérifie (A)}\}$$

et cet ensemble est bien dense et connexe par arcs.

Il reste à prouver que cet ensemble décrit effectivement la situation voulue. Pour cela, il suffit de remarquer (voir paragraphe 8.3) que l'on peut choisir $\phi^g$ et $\phi^g_P$, $\phi^h$ et $\phi^h_P$ vérifiant les mêmes hypothèses qu'à la proposition 7 et tels que

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma_h, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})), \rho} \arrow[r, two heads, "\mathrm{Res}^*"] \arrow[d, "\phi^h"] & \mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})), \rho} \arrow[d, "\phi^g"] \\
\mathcal{O}_{Q(Z^1(\Gamma_h; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))), 0} \arrow[r, two heads, "\mathrm{Res}^*"] & \mathcal{O}_{Q(Z^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))), 0}
\end{tikzcd}$$

commute et qu'on a aussi les mêmes diagrammes commutatifs avec les paraboliques $P$ contenant $\rho(\Gamma_g)$. Les différents cônes sont notés ici $Q(Z^1(\Gamma_h; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})))$, *etc.* pour garder la référence au groupe de surface. Lorsque $\rho$ est réelle, ces isomorphismes commutent avec la conjugaison complexe.

On en tire des conclusions similaires à la proposition 8, dans un voisinage de $\rho$ :

> tout élément $\rho'$ s'écrit de manière unique $\exp(u_0) \cdot \rho''$ avec $\rho''$ un élément de $F^{-1}(Q(H^1(\Gamma_g; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}))))$. De plus $\rho'_{|\Gamma_h}$ est irréductible si, et seulement si, la classe de cohomologie $\mathrm{Res}(F(\rho''))$ de $H^1(\Gamma_h; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}))$ n'appartient pas à $H^1(\Gamma_h; \mathfrak{p})$ pour tout $P$.

Ceci termine la justification du calcul fait plus haut. □

## 7. Isomorphismes formels

> Notre but est de démontrer la proposition 7 qui, comme nous l'avons déjà expliqué est une précision de résultats obtenus par W. Goldman et J. Millson d'une part et C. Simpson d'autre part. Aussi ces derniers résultats sont valables pour les variétés kähleriennes compactes et la généralisation que nous proposons également (voir l'énoncé plus bas).
>
> Une première étape vers la démonstration de la proposition 7 est le résultat correspondant pour les anneaux *complétés.*

Si $(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ est un anneau local, on note $\widehat{\mathcal{O}} = \varprojlim_n \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n$ son complété.

**Proposition 22.** *Soient $X$ une variété kählerienne compacte, $\rho$ une représentation semi-simple de $\Gamma = \pi_1(X,x)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et $Z(\rho)^0$ la composante neutre du centralisateur de $\rho$.*

*Il existe alors un isomorphisme $\psi$ $Z(\rho)^0$-équivariant d'anneaux locaux complets et pour tout sous-groupe parabolique $P$ contenant $\rho(\Gamma)$ un isomorphisme $\psi_P$ tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho} & \xrightarrow{\psi} & \widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^\Gamma\times Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})),0} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,P),\rho} & \xrightarrow{\psi_P} & \widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^\Gamma\times Q^H(\mathfrak{p}),0}.
\end{array}$$

*De plus, au niveau des espaces tangents de Zariski, $\psi$ envoie le sous-espace $B^1(\Gamma,\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ sur $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^\Gamma$.*

*En outre, si la représentation est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et donc que les anneaux $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho}$ et $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^\Gamma\times Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})),0}$ héritent d'une conjugaison complexe, alors $\psi$ commute à la conjugaison complexe (*i.e. *est défini sur* $\mathbf{R}$*).*

*Remarque.* Rappelons que $Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ est le cône quadratique dans $H^1(\Gamma,\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ défini par l'équation $[u,u]=0$. Rappelons aussi que pour un point $\rho$ de la variété $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$ l'espace tangent de Zariski s'identifie à $Z^1(\Gamma,\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})_{|\mathrm{Ad}\circ\rho})$ et pour $0\in\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^\Gamma\times Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ l'espace tangent est $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^\Gamma\times H^1(\Gamma,\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$.

Nous utiliserons sans donner de détails la théorie des foncteurs de déformations en vue de l'étude de $\mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,G),\rho}$ mise en place dans [10] et la théorie des fibrés harmoniques en particulier les résultats de formalité obtenus dans [20].

7.1. **Foncteurs.** Il est classique qu'une $\mathbf{C}$-algèbre locale complète $R$ est uniquement déterminée par le foncteur de la catégorie $\mathscr{A}$ des $\mathbf{C}$-algèbres locales artiniennes dans la catégorie $\mathscr{E}_{ns}$ des ensembles :

$$\begin{aligned} F_R : \mathscr{A} &\longrightarrow \mathscr{E}_{ns} \\ A &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-alg.loc.}}(R,A). \end{aligned}$$

**Lemme 23.** *(lemme 3.2* [10]*)*

*Si $R$ et $S$ sont deux $\mathbf{C}$-algèbres locales complètes alors tout morphisme de foncteurs $\eta : F_R\to F_S$ provient d'un unique morphisme $f : S\to R$, $\eta=f^*$.*

À une $\mathbf{C}$-algèbre de Lie différentielle graduée (a.l.d.g.) $(L^\bullet,\mathrm{d},[\cdot,\cdot])$ est canoniquement associé un foncteur de la catégorie $\mathscr{A}$ dans la catégorie $\mathscr{G}_r$ des groupoïdes ([10] parties 1 et 2)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(L^\bullet,\cdot) : \mathscr{A} &\longrightarrow \mathscr{G}_r \\ (A,\mathfrak{m}) &\longmapsto \mathcal{C}(L^\bullet,A) \end{aligned}$$

où $\mathcal{C}(L^\bullet,A)$ est le groupoïde (de transformations) dont les objets sont les éléments de l'ensemble $Q(L^\bullet\otimes\mathfrak{m}) := \{\alpha\in L^1\otimes\mathfrak{m} \mid \mathrm{d}\alpha+\frac{1}{2}[\alpha,\alpha]=0\}$ et les flèches sont données par l'action du groupe $\exp(L^0\otimes\mathfrak{m})$ ([10] formule (1-1)).

Notons $\mathbf{G}$ un groupe algébrique, plus loin $\mathbf{G}$ sera le groupe $\mathrm{GL}_n$ ou l'un de ses sous-groupes paraboliques. On notera $G=\mathbf{G}(\mathbf{C})$ et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $G$.

Lorsque l'a.l.d.g. $L^\bullet$ est de plus $\mathfrak{g}$-augmentée ([10] paragraphe 3.4), $\epsilon : L^\bullet \to \mathfrak{g}$, le groupe nilpotent $\mathbf{G}^0(A) := \exp(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m})$ admet, par l'augmentation $\epsilon$, une action du groupe $\exp(L^0 \otimes \mathfrak{m})$. Ceci permet de considérer le foncteur suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^0(\cdot) \times \mathcal{C}(L^\bullet, \cdot) : \mathscr{A} &\longrightarrow \mathscr{G}_r \\ A &\longmapsto \mathbf{G}^0(A) \times \mathcal{C}(L^\bullet, A), \end{aligned}$$

et le morphisme de foncteurs

$$\mathcal{C}(\ker(\epsilon : L^\bullet \to \mathfrak{g}), \cdot) \Longrightarrow \mathbf{G}^0(\cdot) \times \mathcal{C}(L^\bullet, \cdot)$$

qui, pour tout $A$, est le foncteur entre groupoïdes donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\ker(\epsilon : L^\bullet \to \mathfrak{g}), A) &\longrightarrow \mathbf{G}^0(A) \times \mathcal{C}(L^\bullet, A) \\ x &\longmapsto (1, x). \end{aligned}$$

*Remarque.* Ces notations, un peu étranges ici, respectent celles adoptées dans [10].

Soit maintenant $\rho$ une représentation de $\Gamma$ dans $G$. Notons $\widetilde{\mathfrak{g}}$ le $\mathfrak{g}$-fibré plat associé à $\mathrm{Ad} \circ \rho$, l'algèbre $\Omega^\bullet(X; \widetilde{\mathfrak{g}})$ des formes différentielles à valeurs dans $\widetilde{g}$ a une structure d'a.l.d.g. augmentée ; l'augmentation vient ici de l'identification de la fibre $\widetilde{\mathfrak{g}}_x$ avec $\mathfrak{g}$ ($\Gamma = \pi_1(X, x)$).

*Remarque.* On notera plus volontiers $D$ la différentielle sur $\Omega^\bullet(X; \widetilde{\mathfrak{g}})$, celle-ci étant définie avec la connexion plate sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

**Théorème 24.** *([10] théorème 6.8, lemme 3.9, lemme 5.12)*
*Avec ces notations, l'holonomie permet de définir un morphisme de foncteurs :*

$$\mathcal{C}(\ker(\epsilon : \Omega^\bullet(X; \widetilde{\mathfrak{g}}) \to \mathfrak{g}), \cdot) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-}alg.loc.}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Hom}(\Gamma, G), \rho}, \cdot)$$

*tel que, pour tout $A$, $\mathcal{C}(\ker(\epsilon : \Omega^\bullet(X; \widetilde{\mathfrak{g}}) \to \mathfrak{g}), A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-}alg.loc.}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Hom}(\Gamma, G), \rho}, A)$ est une équivalence de groupoïdes.*

*De plus, le morphisme de foncteurs $\mathcal{C}(\ker(\epsilon : \Omega^\bullet(X; \widetilde{\mathfrak{g}}) \to \mathfrak{g}), \cdot) \Rightarrow \mathbf{G}^0(\cdot) \times \mathcal{C}(\Omega^\bullet(X; \widetilde{\mathfrak{g}}), \cdot)$ induit, pour tout $A$, une équivalence de groupoïdes.*

*Remarques.*
- On considère un ensemble comme un groupoïde avec pour seules flèches $\mathrm{id}_x$ pour tout $x$ dans cet ensemble.
- Une équivalence de groupoïdes induit en particulier une bijection entre les classes d'isomorphisme, ici :
$$(\exp(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}) \times Q(\Omega^\bullet(X; \widetilde{\mathfrak{g}}) \otimes \mathfrak{m})) / \exp(\Omega^0(X; \widetilde{\mathfrak{g}}) \otimes \mathfrak{m})$$
et
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-alg.loc.}}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Hom}(\Gamma, G), \rho}, A).$$
- Ce morphisme de foncteurs est clairement équivariant pour l'action du centralisateur de $\rho$ et commute à la conjugaison complexe si $\rho$ est à valeurs dans $\mathbf{G}(\mathbf{R})$ (on suppose alors une structure réelle fixée sur $\mathbf{G}$).

Les deux résultats tirés de [10] qui sont importants ici sont :

**Lemme 25.** *([10] théorème 2.4 et lemme 3.8)*
*Si $\psi : L^\bullet \to L'^\bullet$ est un morphisme d'a.l.d.g. (augmentées) qui induit un isomorphisme en cohomologie $\psi_* : H^\bullet(L^\bullet) \to H^\bullet(L'^\bullet)$ (on dit que $\psi$ est un quasi-isomorphisme) alors :*

$$\psi_* : \mathbf{G}^0(A) \times \mathcal{C}(L^\bullet, A) \longrightarrow \mathbf{G}^0(A) \times \mathcal{C}(L'^\bullet, A)$$

*est une équivalence de groupoïdes.*

**Lemme 26.** *([10] lemme 3.10)*

*Si* $\mathrm{d} = 0$, *$L^1$ est de dimension finie et $\epsilon : L^0 \to \mathfrak{g}$ est injective, il existe alors un morphisme de foncteurs :*

$$\mathbf{G}^0(\cdot) \times \mathcal{C}(L^\bullet, \cdot) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-}alg.loc.}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{g}/\epsilon(L^0)\times Q(L^\bullet),0}, \cdot)$$

*et pour tout $A$, $\mathbf{G}^0(A) \times \mathcal{C}(L^\bullet, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-}alg.loc.}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{g}/\epsilon(L^0)\times Q(L^\bullet),0}, A)$ est une équivalence de groupoïdes.*

*Remarques.* – Ici, $Q(L^\bullet) = \{\alpha \in L^1 \mid \mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0\} = \{\alpha \in L^1 \mid [\alpha, \alpha] = 0\}$.

- Le foncteur $\mathbf{G}^0(A) \times \mathcal{C}(L^\bullet, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-alg.loc.}}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{g}/\epsilon(L^0)\times Q(L^\bullet),0}, A)$ est tout à fait explicite. En effet, par la dualité points-morphismes de la géométrie algébrique, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-alg.loc.}}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{g}/\epsilon(L^0)\times Q(L^\bullet),0}, A)$ s'identifie canoniquement à $(\mathfrak{g}/\epsilon(L^0)\otimes\mathfrak{m})\times Q(L^\bullet\otimes\mathfrak{m})$, ce foncteur à $(\exp(X), \alpha) \in \exp(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{m}) \times Q(L^\bullet \otimes \mathfrak{m})$ associe $(\overline{X}, \alpha) \in (\mathfrak{g}/\epsilon(L^0)\otimes\mathfrak{m}) \times Q(L^\bullet \otimes \mathfrak{m})$.

Supposons maintenant que $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$. Dans ce cas la représentation $\rho$ définit un $\mathbf{C}$-fibré vectoriel plat $\widetilde{V}$ de rang $n$ sur $X$. De la sorte $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}) \simeq \mathrm{End}(\mathbf{C}^n)$ et le fibré $\widetilde{\mathfrak{gl}_n}(\mathbf{C})$ s'identifie au fibré $\mathrm{End}(\widetilde{V}) = \widetilde{V} \otimes \widetilde{V}^*$.

Remarquons également que dans la démonstration de la proposition 22, il suffit de considérer les paraboliques maximaux — les autres paraboliques étant des intersections de ces derniers. Ces paraboliques maximaux sont paramétrés par les sous-espaces $\rho(\Gamma)$-invariants : à un tel sous-espace $E$ on désigne par $P_E$ le parabolique associé $P_E = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \mid gE \subset E\}$. L'espace $E$ définit un sous-fibré plat $\widetilde{E} \subset \widetilde{V}$ et $\Omega^\bullet(X; \widetilde{\mathfrak{p}}_E)$ s'identifie canoniquement aux formes $\alpha$ de $\Omega^\bullet(X; \widetilde{V} \otimes \widetilde{V}^*)$ telles que $\langle \alpha, \sigma \rangle$ est à valeurs dans $\widetilde{E}$ pour toute section $\sigma$ de $\widetilde{E}$.

Comme les constructions plus haut sont naturelles vis-à-vis des sous-groupes, on obtient facilement :

**Lemme 27.** *Avec les hypothèses de la proposition 22 et les notations ci-dessus, on a, pour tout sous-espace $E$ $\rho(\Gamma)$-invariant, les diagrammes commutatifs de morphismes de foncteurs :*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}(\ker(\epsilon : \Omega^\bullet(X; \widetilde{\mathfrak{p}}_E) \to \mathfrak{p}_E), \cdot) & \Longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-}alg.loc.}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Hom}(\Gamma, P_E),\rho}, \cdot) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\mathcal{C}(\ker(\epsilon : \Omega^\bullet(X; \widetilde{V} \otimes \widetilde{V}^*) \to \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})), \cdot) & \Longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-}alg.loc.}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho}, \cdot)
\end{array}$$

*et*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}(\ker(\epsilon : \Omega^\bullet(X; \widetilde{\mathfrak{p}}_E) \to \mathfrak{p}_E), \cdot) & \Longrightarrow & P_E^0(\cdot) \times \mathcal{C}(\Omega^\bullet(X; \widetilde{\mathfrak{p}}_E), \cdot) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\mathcal{C}(\ker(\epsilon : \Omega^\bullet(X; \widetilde{V} \otimes \widetilde{V}^*) \to \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})), \cdot) & \Longrightarrow & \mathrm{GL}_n^0(\cdot) \times \mathcal{C}(\Omega^\bullet(X; \widetilde{V} \times \widetilde{V}^*), \cdot).
\end{array}$$

7.2. **Harmonicité et formalité.** Si $(W, D)$ est un fibré plat qui admet une métrique harmonique ([20] p. 16), la théorie de Hodge permet de décomposer la connexion $D$ comme la somme de deux opérateurs $D = D' + D''$ ([20] p. 13). Le noyau de $D' : \Omega^\bullet(X;W) \to \Omega^{\bullet+1}(X;W)$ permet de définir un sous-complexe de $\Omega^\bullet(X;W)$ que nous notons $(\ker D')^\bullet(X;W)$.

Il est aussi bien connu que le sous-espace $\mathcal{H}^\bullet(X;W)$ des formes harmoniques est isomorphe à $H^\bullet(X;W) = H^\bullet(\Omega^\bullet(X;W), D)$ et l'application $\mathcal{H}^\bullet(X;W) \to H^\bullet(X;W)$ est la restriction de $\ker(D : \Omega^\bullet(X;W) \to \Omega^{\bullet+1}(X;W)) \to H^\bullet(X;W)$.

**Lemme 28.** *(*[20] *lemme 2.2)*

*Sous ces hypothèses, les applications suivantes sont des quasi-isomorphismes (*i.e. *induisent des isomorphismes en cohomologie) :*
- *l'injection de* $((\ker D')^\bullet(X;W), D'')$ *dans* $(\Omega^\bullet(X;W), D)$,
- *la projection de* $((\ker D')^\bullet(X;W), D'')$ *dans* $(H^\bullet(X;W), 0)$ *définie par la projection orthogonale sur* $\mathcal{H}^\bullet(X;W)$ *(la métrique sur* $W$ *et la structure riemanienne sur* $X$ *permettent de définir une structure hermitienne sur* $\Omega^\bullet(X;W)$*) suivi de l'application naturelle de* $\mathcal{H}^\bullet(X;W)$ *dans* $H^\bullet(X;W)$.

Le résultat de K. Corlette ([6]) montre que tout fibré vectoriel (réel ou complexe) plat et simple sur $X$ admet une unique (à multiplication par un scalaire près) métrique harmonique (voir aussi [12] pour une généralisation).

Écrivons $\mathbf{C}^n$ comme une somme de $\Gamma$-modules simples :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^n &= E_1 \oplus \cdots \oplus E_k \\ E_i &= E_{i1} \oplus \cdots \oplus E_{il_i} \quad \text{avec } E_{ij} \simeq F_i \text{ est simple.} \end{aligned}$$

Ceci est possible précisèment car on a supposé $\rho$ semi-simple. Lorsque $\rho$ est à valeurs réelles, cette décomposition est invariante par conjugaison complexe (nous n'écrivons pas comment).

Les $\Gamma$-modules $F_1, \ldots, F_k$ définissent des $\mathbf{C}$-fibrés plats et simples sur $X$ qui sont alors harmoniques par le théorème de K. Corlette. Ceci permet de construire des métriques harmoniques sur tous les fibrés associés (voir [20] paragraphe « Functoriality, tensor product and dual ») et en particulier sur $\widetilde{V} \otimes \widetilde{V}^*$ et les fibrés $\widetilde{\mathfrak{p}}_E$. On remarque que la métrique sur $\widetilde{\mathfrak{p}}_E$ est la restriction de celle sur $\widetilde{V} \otimes \widetilde{V}^*$.

Dans ce cas, on vérifie que $(\ker D')^\bullet(X;W)$ est une sous-a.l.d.g. augmentée de $\Omega^\bullet(X;W)$ pour $W = \widetilde{V} \otimes \widetilde{V}^*$ ou $W = \widetilde{\mathfrak{p}}_E$, que $H^\bullet(X;W)$ admet une structure naturelle d'a.l.d.g. augmentée et que la projection de $(\ker D')^\bullet(X;W)$ dans $H^\bullet(X;W)$ est un morphisme d'a.l.d.g. augmentée.

Par ailleurs la métrique sur $\widetilde{V} \otimes \widetilde{V}^*$ est invariante par le compact maximal du groupe réductif $Z(\rho)^0$ donc $(\ker D')^\bullet(X;W)$ et $\mathcal{H}^\bullet(X;W)$ sont invariants par ce groupe et ainsi par tout le groupe $Z(\rho)^0$ par l'astuce unitaire de Weyl (en effet l'algèbre de Lie du stabilisateur dans $Z(\rho)^0$ d'un de ces deux espaces est stable par multiplication par $\sqrt{-1}$ et contient l'algèbre de Lie du compact maximal, ceci implique qu'elle est égale à $Z(\rho)^0$).

Quand $\rho$ est réelle la métrique sur $\widetilde{V}\otimes\widetilde{V}^*$ provient d'une métrique réelle et ainsi $(\ker D')^\bullet(X;W)$ et $\mathcal{H}^\bullet(X;W)$ sont invariants par conjugaison complexe (qui n'est définie bien sûr uniquement lorsque $\rho$ est réelle).

**Lemme 29.** *Cette discussion montre que les deux quasi-isomorphismes :*
– $((\ker D')^\bullet(X;\widetilde{V}\otimes\widetilde{V}^*),D'')\hookrightarrow(\Omega^\bullet(X;\widetilde{V}\otimes\widetilde{V}^*),D)$,
– $((\ker D')^\bullet(X;\widetilde{V}\otimes\widetilde{V}^*),D'')\twoheadrightarrow(H^\bullet(X;\widetilde{V}\otimes\widetilde{V}^*),0)$
*sont $Z(\rho)^0$-équivariant et commutent à la conjugaison complexe quand $\rho$ est réelle.*

Par la $Z(\rho)^0$-équivariance, il suffit de vérifier la propriété pour les paraboliques $P_E$ associés aux sous-espaces suivants :

$$E=\bigoplus_{i=1}^{k}\bigoplus_{j=1}^{m_i}E_{ij}\text{ pour }(m_1,\dots,m_k)\in\mathbf{N}^k\backslash\{0\}\text{ avec }m_i\le l_i,\forall i.$$

On remarque aisément que, pour un tel $E$ :

$$(\ker D')^\bullet(X;\widetilde{\mathfrak{p}}_E)=(\ker D')^\bullet(X;\widetilde{V}\otimes\widetilde{V}^*)\cap\Omega^\bullet(X;\widetilde{\mathfrak{p}}_E)$$

et que la projection de $(\ker D')^\bullet(X;\widetilde{\mathfrak{p}}_E)$ sur $H^\bullet(X;\widetilde{\mathfrak{p}}_E)\subset H^\bullet(X;\widetilde{V}\otimes\widetilde{V}^*)$ et la restriction de $(\ker D')^\bullet(X;\widetilde{V}\otimes\widetilde{V}^*)\to H^\bullet(X;\widetilde{V}\otimes\widetilde{V}^*)$.

Par ailleurs $H^0(X;\widetilde{V}\otimes\widetilde{V}^*)\simeq\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^\Gamma$ et $H^0(X;\widetilde{\mathfrak{p}}_E)\simeq\mathfrak{p}_E^\Gamma$, de sorte que les hypothèses du lemme 26 sont vérifiées pour $H^\bullet(X;W)$ quand $W=\widetilde{V}\otimes\widetilde{V}^*$ ou $W=\widetilde{\mathfrak{p}}_E$.

L'application successive des lemmes 25, 26, 27, 28, 29 et du théorème 24 montre

**Proposition 30.** *Sous les hypothèses de la proposition 22, il existe un morphisme de foncteur de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{E}_{ns}$ :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-}alg.loc.}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho},\cdot)\Longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-}alg.loc.}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^\Gamma\times Q(H^\bullet(X;\widetilde{V}\otimes\widetilde{V}^*)),0},\cdot)$$

*qui est $Z(\rho)^0$-équivariant et commute à la conjugaison complexe si $\rho$ est réelle et telle que, pour tout $A$,*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-}alg.loc.}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho},A)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-}alg.loc.}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^\Gamma\times Q(H^\bullet(X;\widetilde{V}\otimes\widetilde{V}^*)),0},A)$$

*est une bijection.*

*De plus, pour tout sous-espace $E\subset\mathbf{C}^n$ stable par $\rho$ il existe un morphisme de foncteurs :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-}alg.loc.}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,P_E),\rho},\cdot)\Longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-}alg.loc.}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}_E/\mathfrak{p}_E^\Gamma\times Q(H^\bullet(X;\widetilde{\mathfrak{p}}_E)),0},\cdot)$$

*qui induit, pour tout $A$, une bijection et tel que :*

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-}alg.loc.}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,P_E),\rho},\cdot) & \Longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-}alg.loc.}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}_E/\mathfrak{p}_E^\Gamma\times Q(H^\bullet(X;\widetilde{\mathfrak{p}}_E)),0},\cdot)\\ \Downarrow & & \Downarrow\\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-}alg.loc.}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho},\cdot) & \Longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-}alg.loc.}(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^\Gamma\times Q(H^\bullet(X;\widetilde{V}\otimes\widetilde{V}^*)),0},\cdot)\end{array}$$

*commute.*

Cette dernière proposition implique immédiatement la proposition 22, vu le lemme 23 et le fait que, pour tout $\Gamma$-module $W$, en notant $\widetilde{W}$ le fibré plat associé, $H^\bullet(X;\widetilde{W})$ est naturellement isomorphe à $H^\bullet(\Gamma; W)$. La propriété voulu sur les espaces tangents de Zariski s'obtient par un calcul explicite en tenant compte que l'espace tangent de Zariski en un point $x$ d'une variété analytique $X$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-alg.loc.}}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}, \mathbf{C}[\epsilon]/(\epsilon^2))$.

## 8. Isomorphismes analytiques

Cette partie est consacrée à la démonstration de la proposition 7 à partir de la proposition 22 ci-dessus.

Plus généralement nous obtiendrons l'énoncé valable pour les variétés kähleriennes compactes :

**Proposition 31.** *Soit $\rho$ une représentation semi-simple de* $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$ *où $\Gamma$ est le groupe fondamental d'une variéte kählerienne compacte. Notons $Z(\rho)^0$ la composante neutre du centralisateur de $\rho$.*

*Il existe alors un isomorphisme $Z(\rho)^0$-équivariant $\phi$ d'anneaux locaux analytiques et, pour tout parabolique $P$ contenant l'image $\rho(\Gamma)$, un isomorphisme $\phi_P$ tels que*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{O}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^\Gamma \times Q^H(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})),0} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,P),\rho} & \xrightarrow{\phi_P} & \mathcal{O}_{\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^\Gamma \times Q^H(\mathfrak{p}),0}.
\end{array}$$

*Aussi $\phi$ induit un isomorphisme sur les espaces tangents qui envoie $B^1(\Gamma; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ sur $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^\Gamma$.*

*En outre, lorsque $\rho$ est réelle, $\phi$ commute à la conjugaison complexe.*

Remarquons tout de suite que, par $Z(\rho)^0$-équivariance de $\phi$, l'existence de $\phi_{P_i}$ (où encore $P_1, \dots, P_k$ sont des représentants des classes de conjugaison des paraboliques maximaux contenant $\rho(\Gamma)$ pour l'action de $K \cap Z(\rho)^0$) suffit pour montrer la proposition.

Nous utiliserons une version équivariante du théorème d'approximation d'Artin qui sera exposée dans le paragraphe suivant.

8.1. **Théorème d'approximation.** Dans ce paragraphe, notons $\mathbf{k}$ le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_N)$ un nombre fini de variables. On s'intéresse aux solutions de

$$f(x, y) = 0$$

où $f = (f_1, \dots, f_m)$ appartient à $\mathbf{k}\{x, y\}^m$, $\mathbf{k}\{x, y\}$ est l'anneau local des séries convergentes en $x$ et $y$. Par solution de cette équation il faut comprendre une famille de $N$ séries convergentes de $\mathbf{k}\{x\}$, appelons les abusivement $y_1, \dots, y_N$, telles que la série de $\mathbf{k}\{x\}$ obtenue en substituant dans $f$ les variables $y_i$ par les séries correspondantes est identiquement nulle. L'anneau des séries formelles en $x$ est noté $\mathbf{k}[\![x]\!]$ ou $\mathbf{k}[\![x_i]\!]_{i=1,\dots,n}$.

**Théorème.** *(Artin* [1]*)*

*Pour tout entier $c$ et pour $\bar{y} = (\bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_N(x))$ dans $\mathbf{k}[\![x]\!]^N$ tel que*

$$f(x, \bar{y}) = 0,$$

*il existe* $y = (y_1(x), \dots, y_N(x))$ *dans* $\mathbf{k}\{x\}^N$ *tel que*

$$f(x, y) = 0 \text{ et } y \equiv \bar{y} \mod \mathfrak{m}^c$$

*où* $\mathfrak{m}$ *est l'idéal maximal de* $\mathbf{k}[\![x]\!]$.

C'est à dire une solution formelle implique l'existence d'une solution convergente qui coïncide avec la solution formelle à un ordre arbitraire.

Supposons qu'un groupe réductif $H$ agissent de manière linéaire sur $x$ et sur $y$, on entend par là que $H$ a une représentation dans l'espace vectoriel $\mathbf{k}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{k}x_n$ des polynomes de degré un. On veut s'intéresser aux solutions équivariantes *i.e.* telles que

$$h \cdot (y_1(x), \dots, y_N(x)) = (y_1(h \cdot x), \dots, y_N(h \cdot x)) \text{ pour tout } h \text{ dans } H.$$

**Théorème.** *(Bierstone & Milmann* [3]*)*

*Sous les mêmes hypothèses, si de plus la solution formelle* $\bar{y}$ *est* $H$*-équivariante, alors on a les mêmes conclusions avec la solution analytique* $y$ $H$*-équivariante.*

8.2. **Démonstration de la proposition.** Il s'agit de se ramener à ce dernier théorème. Par le même raisonnement que dans la démonstration de la proposition 8 on peut supposer d'abord que tous les cônes sont des sous-cônes de $Z^1(\Gamma; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$.

Le choix d'une partie génératrice permet de plonger $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})^N$ et $Z^1(\Gamma; \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ dans $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^N$ (une représentation et un 1-cocycle sont determinés par l'image de la partie génératrice). L'anneau $\mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})), \rho}$ est le quotient de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})^N, \rho} = \mathbf{C}\{a^i_{k,l}\}$, où $(a^i_{k,l})_{1 \le k,l \le n}$ sont les fonctions coordonnées des éléments $a_i$ de la partie génératrice de $\Gamma$ dans un plongement matriciel $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \subset M_n(\mathbf{C})$. On notera $\mathcal{I}_{\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))}$ l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})^N, \rho}$ définissant $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))$ et de même pour $\mathcal{I}_{\mathrm{Hom}(\Gamma, P)}$. Soit aussi $\mathcal{I}_{P^N}$ l'idéal définissant $P^N \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})^N$. Les deux idéaux $\mathcal{I}_{\mathrm{Hom}(\Gamma, P)}$ et $\mathcal{I}_{P^N} + \mathcal{I}_{\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))}$ ont même radical car $\mathrm{Hom}(\Gamma, P) = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})) \cap P^N$.

De même $\mathcal{O}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})), 0}$ est le quotient de $\mathcal{O}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^N, 0} = \mathbf{C}\{A^i_{k,l}\}$ par un idéal $\mathcal{I}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))}$ et $\mathcal{I}_{Q(\mathfrak{p})}$ est l'idéal définissant $Q(\mathfrak{p})$.

Pour faciliter les notations on notera $\mathcal{O}_{\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})^N, \rho} = \mathbf{C}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ et $\mathcal{O}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^N, 0} = \mathbf{C}\{X_\beta\}_{\beta \in B}$. Remarquons que l'action de $Z(\rho)^0$ sur $\bigoplus \mathbf{C}x_\alpha$ et sur $\bigoplus \mathbf{C}X_\beta$ est linéaire.

8.2.1. *Construction d'un isomorphisme invariant.* On a donc une suite de morphismes d'anneaux locaux, $\psi$ est l'isomorphisme donnée par la proposition 22

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})^N, \rho} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})), \rho} \xrightarrow{\psi} \widehat{\mathcal{O}}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})), 0}.$$

On choisit $\bar{\psi}_\alpha$ des éléments de $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^N, 0}$ relevant l'élément $\psi(x_\alpha)$ image de $x_\alpha$ par le morphisme $\psi$. Ces séries formelles en $X_\beta$ vérifient :

- la série $\bar{\psi}_\alpha$ est $Z(\rho)^0$-équivariant modulo l'idéal $\widehat{\mathcal{I}}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))}$ : pour tout $z$ dans le groupe $Z(\rho)^0$, $z^{-1}\big(\bar{\psi}_\alpha(z \cdot X_\beta)\big)_{\alpha \in A} \equiv \big(\bar{\psi}_\alpha(X_\beta)\big)_{\alpha \in A} \mod \widehat{\mathcal{I}}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))}$,
- pour tout $f$ dans $\widehat{\mathcal{I}}_{\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))}$, la série $f\big(\bar{\psi}_\alpha\big)$ de $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^N, 0}$, obtenue en substitutant les variables $x_\alpha$ par les séries $\bar{\psi}_\alpha$, appartient à $\widehat{\mathcal{I}}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))}$,
- pour tout $f$ dans $\widehat{\mathcal{I}}_{P^N}$, $f\big(\bar{\psi}_\alpha\big)$ appartient à $\widehat{\mathcal{I}}_{\mathfrak{p}^N}$.

Voyons que l'on peut de plus choisir $\left(\bar{\psi}_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ $Z(\rho)^0$-équivariant, *i.e.* pour tout $z$ dans $Z(\rho)^0$, $z^{-1}\left(\bar{\psi}_\alpha(z\cdot X_\beta)\right)_{\alpha\in A} = \left(\bar{\psi}_\alpha(X_\beta)\right)_{\alpha\in A}$.

Définissons

$$\left(\bar{\psi}'_\alpha(X)\right)_{\alpha\in A} = \int_L l^{-1}\left(\bar{\psi}_\alpha(l\cdot X)\right)_{\alpha\in A} d\mu(l)$$

toujours avec $L$ le compact maximal de $Z(\rho)^0$ et $\mu$ est la mesure de Haar sur $L$. Alors $\left(\bar{\psi}'_\alpha\right)$ est $L$-équivariant et donc $Z(\rho)^0$-équivariant par l'astuce unitaire de Weyl. Aussi $\bar{\psi}'_\alpha$ est encore un relevé de $\psi(x_\alpha)$, ce qu'on voulait. On abandonne alors les exposants $'$.

Comme l'idéal $\mathcal{I}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))}$ est invariant par $Z(\rho)^0$, le théorème de Peter-Weyl implique qu'il est engendré par des éléments $L$-invariants et à leur tour ces éléments sont $Z(\rho)^0$-invariants encore par l'astuce unitaire ([3] p. 118). Notons $f_1,\dots,f_K$ des générateurs $Z(\rho)^0$-invariants de $\mathcal{I}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))}$, ce sont aussi des générateurs de $\widehat{\mathcal{I}}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))}$.

Pour tout $i=1,\dots,K$ la série formelle $f_i\left(\bar{\psi}_\alpha\right)$ est ainsi $Z(\rho)^0$-invariante et appartient donc à $\left(\widehat{\mathcal{I}}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))}\right)^{Z(\rho)^0} = \widehat{\mathcal{I}}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))} \cap \left(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^N,0}\right)^{Z(\rho)^0}$. Soit $g_1,\dots,g_L$ des générateurs de l'idéal $\left(\mathcal{I}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))}\right)^{Z(\rho)^0}$ de l'anneau $\left(\mathcal{O}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^N,0}\right)^{Z(\rho)^0}$, ce sont aussi des générateurs de l'idéal complété $\left(\widehat{\mathcal{I}}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))}\right)^{Z(\rho)^0}$. Pour tout $i=1,\dots,K$, il existe $\left(\bar{\gamma}_{i,j}\right)_{j=1,\dots,L}$ dans $\left(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^N,0}\right)^{Z(\rho)^0}$ tels que

$$f_i\left(\bar{\psi}_\alpha\right) = \sum \bar{\gamma}_{i,j} g_j.$$

On applique le théorème d'Artin équivariant aux équations

$$f_i(\psi_\alpha) - \sum \gamma_{i,j} g_j = 0$$

en les inconnues (*i.e.* les variables notées « $y$ » dans le théorème d'approximation) $\psi_\alpha$ et $\gamma_{i,j}$ où l'action de $Z(\rho)^0$ sur $\bigoplus \mathbf{C}\psi_\alpha$ est identique à celle sur $\bigoplus \mathbf{C}x_\alpha$ et où l'action sur $\bigoplus \mathbf{C}\gamma_{i,j}$ est l'action triviale, les variables « $x$ » du théorème sont ici les $X_\beta$. On trouve en particulier des éléments $\psi_\alpha$ de $\mathcal{O}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^N,0} = \mathbf{C}\{X_\beta\}$ tels que $(\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ est $Z(\rho)^0$-équivariant et, pour tout $f$ dans $\mathcal{I}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))}$, $f(\psi_\alpha) \in \mathcal{I}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))}$.

Ces éléments définissent par substitution un morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})^N,\rho} = \mathbf{C}\{x_\alpha\} &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^N,0} = \mathbf{C}\{X_\beta\} \\ f(x_\alpha) &\longmapsto f(\psi_\alpha(X_\beta)) \end{aligned}$$

qui passe au quotient pour donner un morphisme

$$\phi : \mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho} = \mathcal{O}_{\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})^N,\rho}/\mathcal{I}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))} \longrightarrow \mathcal{O}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))}$$

qui est automatiquement $Z(\rho)^0$-équivariant.

Enfin, il suffit de raisonner comme dans [1] p. 282 pour montrer que $\phi$ est un isomorphisme pourvu que l'entier $c$ utilisé dans le théorème d'approximation est supérieur à 2. On ne sait a priori rien sur $\phi(\mathcal{I}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,P)})$, c'est-à-dire si $\phi$ induit un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,P)}$ vers $\mathcal{O}_{Q(\mathfrak{p})}$.

8.2.2. *Isomorphisme compatible avec les paraboliques.* On cherche donc les équations et les variables équivariantes supplémentaires qui nous autoriserons à conclure.

Pour ce faire considérons la série formelle

$$\bar\theta = \sum x_\alpha^* \bar\psi_\alpha \text{ de } \mathbf{C}[\![x_\alpha^*, X_\beta]\!].$$

Le groupe réductif $Z(\rho)^0$ agit sur $\bigoplus \mathbf{C}x_\alpha^*$ par la représentation duale de $\bigoplus \mathbf{C}x_\alpha$. Pour cette action $\bar\theta$ est un élément $Z(\rho)^0$-invariant de $\mathbf{C}[\![x_\alpha^*, X_\beta]\!]$.

Tout élément $\delta$ de $\mathbf{C}\{x_\alpha^*, X_\beta\}$ (resp. $\mathbf{C}[\![x_\alpha^*, X_\beta]\!]$) se décompose

$$\delta = \sum_{k\geq 0} \delta^{(k)}$$

en composantes homogènes suivant les $(x_\alpha^*)$. Si $\lambda$ est un élément de $\bigoplus \mathbf{C}x_\alpha$, l'évaluation définit un élément $\delta^{(1)}(\lambda)$ de $\mathbf{C}\{X_\beta\}$ (resp. $\mathbf{C}[\![X_\beta]\!]$).

Fixons un parabolique maximal $P$ contenant $\rho(\Gamma)$, alors $\mathcal{I}_{P^N}$ est engendré par des formes linéaires

$$\lambda_1, \dots, \lambda_N, \quad \lambda_i = \sum \lambda_{i,\alpha} x_\alpha$$

(annulation de certains coefficients matriciels). On a alors, comme $\bar\theta = \bar\theta^{(1)}$

$$\lambda_i(\bar\psi_\alpha) \text{ appartient à } \widehat{\mathcal{I}}_{Q(\mathfrak{p})} \text{ si, et seulement si, } \bar\theta(\lambda_i) \text{ appartient à } \widehat{\mathcal{I}}_{Q(\mathfrak{p})}$$

car ces deux éléments de $\mathbf{C}[\![X_\beta]\!]$ sont en fait égaux.

Posons

$$\mathcal{J}_P = \Big\{\delta \in \mathbf{C}\{x_\alpha^*, X_\beta\} \mid \delta^{(0)} = 0, \delta^{(1)}(\lambda_i) \in \mathcal{I}_{Q(\mathfrak{p})} \text{ pour tout } i\Big\},$$

$\mathcal{J}_P$ est un idéal de $\mathbf{C}\{x_\alpha^*, X_\beta\}$ et son complété est

$$\widehat{\mathcal{J}}_P = \{\delta \in \mathbf{C}[\![x_\alpha^*, X_\beta]\!] \mid \delta^{(0)} = 0, \delta^{(1)}(\lambda_i) \in \widehat{\mathcal{I}}_{Q(\mathfrak{p})} \text{ pour tout } i\}.$$

Par définition des $(\bar\psi_\alpha)$, $\bar\theta$ appartient à $\widehat{\mathcal{J}}_P$. Donc $\bar\theta$ est dans l'idéal $\widehat{\mathcal{J}}_P \cap \mathbf{C}[\![x_\alpha^*, X_\beta]\!]^{Z(\rho)^0}$ de $\mathbf{C}[\![x_\alpha^*, X_\beta]\!]^{Z(\rho)^0}$. Cet idéal est le complété de $(\mathcal{J}_P)^{Z(\rho)^0} = \mathcal{J}_P \cap \mathbf{C}\{x_\alpha^*, X_\beta\}^{Z(\rho)^0}$. Soit $(h_j)$ des générateurs de cet idéal $(\mathcal{J}_P)^{Z(\rho)^0}$, alors

$$\bar\theta = \sum_j \bar\theta_j h_j$$

avec $\bar\theta_j$ dans $\mathbf{C}[\![x_\alpha^*, X_\beta]\!]^{Z(\rho)^0}$. Cette égalité devient, en considérant les composantes homogènes,

$$\bar\theta = \bar\theta^{(1)} = \sum_j \bar\theta_j^{(0)} h_j^{(1)} + \bar\theta_j^{(1)} h_j^{(0)}.$$

Comme l'action de $Z(\rho)^0$ sur $\mathbf{C}[\![x_\alpha^*, X_\beta]\!]$ respecte le degré, on sait que $\bar\theta_j^{(0)}$ et $\bar\theta_j^{(1)}$ sont dans $\mathbf{C}[\![x_\alpha^*, X_\beta]\!]^{Z(\rho)^0}$. Ce qui prouve que $\bar\theta_j^{(0)}$ est dans $\mathbf{C}[\![X_\beta]\!]^{Z(\rho)^0}$ et pour tout $j$

$$\bar\theta_j^{(1)} = \sum_\alpha x_\alpha^* \bar\theta_{j,\alpha}^{(1)}, \quad \big(\bar\theta_{j,\alpha}^{(1)}\big)_{\alpha\in A} \text{ est } Z(\rho)^0\text{-équivariant.}$$

Ainsi $\big(\bar\psi_\alpha\big) = \sum_j \bar\theta_j^{(0)}\big(h_{j,\alpha}^{(1)}\big) + \big(\bar\theta_{j,\alpha}^{(1)}\big)h_j^0$.

On applique alors l'approximation équivariante aux équations

$$f_i(\psi_\alpha) - \sum_j \gamma_{i,j} g_j = 0$$
$$\psi_\alpha - \sum_j \theta_j^{(0)} h_{j,\alpha}^{(1)} + \theta_{j,\alpha}^{(1)} h_j^{(0)} = 0$$

en les inconnues $\psi_\alpha$, $\gamma_{i,j}$, $\theta_j^{(0)}$, $\theta_{j,\alpha}^{(1)}$, les variables $\gamma_{i,j}$ et $\theta_j^{(0)}$ sont « invariantes », *i.e.* la représentation de $Z(\rho)^0$ sur $\bigoplus \mathbf{C}\gamma_{i,j}$ est la représentation triviale,… les variables $(\psi_\alpha)$ et $\big(\theta_{j,\alpha}^{(1)}\big)$ sont « équivariantes », *i.e.* la représentation sur $\bigoplus \mathbf{C}\psi_\alpha$ est la même que sur $\bigoplus \mathbf{C}x_\alpha$,…

Ceci permet maintenant de trouver des éléments $\psi_\alpha$ de $\mathbf{C}\{X_\beta\}$ pour tout $\alpha \in A$, tels que le « vecteur » $(\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ est $Z(\rho)^0$-équivariant et tel que

– pour tout $f$ dans $\mathcal{I}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}))}$, $f(\psi_\alpha)$ appartient à $\mathcal{I}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))}$,
– pour tout $f$ dans $\mathcal{I}_{P^N}$, $f(\psi_\alpha)$ appartient à $\mathcal{I}_{\mathfrak{p}^N}$.

Ce qui fournit comme plus haut un morphisme

$$\phi : \mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho} \longrightarrow \mathcal{O}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})),0}$$

qui est un isomorphisme $Z(\rho)^0$-équivariant et qui de plus induit un morphisme

$$\phi_P : \mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,P),\rho} \longrightarrow \mathcal{O}_{Q(\mathfrak{p}),0}$$

qui s'avère être aussi un isomorphisme. Ainsi par $Z(\rho)^0$-équivariance $\phi$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,P'),\rho} \to \mathcal{O}_{Q(\mathfrak{p}'),0}$ pour tout $P'$ dans la classe de conjugaison de $P$ par $Z(\rho)^0$. On conclut en recommençant le même raisonnement avec un représentant de chaque classe de paraboliques pour l'action de $Z(\rho)^0$.

Aussi, si l'entier $c$ dans le théorème d'approximation est supérieur à 2, les isomorphismes induit par $\phi$ et $\psi$ sur les espaces tangents de Zariski coïncident et le fait que l'image de $B^1(\Gamma;\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}))$ est $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})/\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})^\Gamma$ est alors évidemment vérifiée. Ce qui conclut la proposition.

Nous avons utilisé dans cette démonstration le lemme suivant sur les invariants des groupes réductifs.

**Lemme 32.** *Si un groupe réductif $H$ agit linéairement sur $\bigoplus_{i=1,\dots,n} \mathbf{C}x_i$, alors l'algèbre des invariants $\mathbf{C}\{x\}^H$ est le quotient d'une algèbre locale analytique de type fini,* i.e. *il existe des éléments $p_1,\dots,p_m$ de $\mathbf{C}\{x\}^H$ tels que*

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\{p\} &\longrightarrow \mathbf{C}\{x\}^H \\ s &\longmapsto s(p_1(x),\dots,p_m(x)) \end{aligned}$$

*est surjective. De plus l'application $\mathbf{C}[\![p]\!] \to \mathbf{C}[\![x]\!]^H$ est aussi surjective.*

**Démonstration** : D'après D. Mumford ([16] théorème 1.1), l'algèbre $\mathbf{C}[x]^H$ des polynômes invariants est de type fini. Il existe donc des polynômes invariants $p_1,\dots,p_m$ tels que

$$\begin{aligned} \mathbf{C}[p] &\longrightarrow \mathbf{C}[x]^H \\ s &\longmapsto s(p_1(x),\dots,p_m(x)) \end{aligned}$$

est surjective. Il est immédiat que l'application induite $\mathbf{C}[\![p]\!] \to \mathbf{C}[\![x]\!]^H$ est surjective et c'est un résultat de D. Luna ([14]) que $\mathbf{C}\{p\} \to \mathbf{C}\{x\}^H$ est aussi surjectif. $\square$

8.3. **Réalité et restrictions.** Lorsque la représentation $\rho$ est réelle, les anneaux locaux $\mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho}$, $\mathcal{O}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})),0}$, *etc.* ont une structure réelle

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho} = \mathcal{O}^{\sigma}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C},\ \mathcal{O}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})),0} = \mathcal{O}^{\sigma}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})),0} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$$

où $\sigma$ désigne la conjugaison complexe sur ces anneaux et il faut disposer d'un isomorphisme entre $\mathcal{O}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho}$ et $\mathcal{O}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})),0}$ provenant d'un isomorphisme entre $\mathcal{O}^{\sigma}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho}$ et $\mathcal{O}^{\sigma}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})),0}$.

Comme le théorème d'approximation d'Artin est aussi valable sur $\mathbf{R}$, il suffit donc d'observer que l'isomorphisme $\psi$ de la proposition 22 entre les anneaux complets $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho}$ et $\widehat{\mathcal{O}}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})),0}$ provient d'un isomorphisme entre $\widehat{\mathcal{O}}^{\sigma}_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})),\rho}$ et $\widehat{\mathcal{O}}^{\sigma}_{Q(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})),0}$, ce qui est vrai car $\psi$ commute avec la conjugaison complexe $\sigma$.

Par ailleurs, les compatibilités avec les restrictions à un sous-groupe d'indice fini (paragraphe 6.11) s'obtiennent de manière similaire. On déduit à nouveau l'existence des isomorphismes analytiques de l'existence des isomorphismes formels. On parvient aux isomorphismes formels par l'observation que la construction des différents opérateurs $D'$, $D''$ et $\Delta$ est naturelle par pull-back.

## Références


[1] M. Artin – « On the solutions of analytic equations », *Invent. Math.* **5** (1968), p. 277–291.

[2] M. F. Atiyah et I. G. Macdonald – *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[3] E. Bierstone et P. Milman – « Invariant solutions of analytic equations », *Enseign. Math. (2)* **25** (1979), no. 1-2, p. 115–130.

[4] J. Bochnak, M. Coste et M.-F. Roy – *Géométrie algébrique réelle*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 12, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[5] S. B. Bradlow, O. García-Prada et P. B. Gothen – « Representations of surface groups in the general linear group », To appear in the Proceedings of the Fall Workshop on Geometry and Physics, Coimbra 2003.

[6] K. Corlette – « Flat $G$-bundles with canonical metrics », *J. Differential Geom.* **28** (1988), no. 3, p. 361–382.

[7] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan et D. Sullivan – « Real homotopy theory of Kähler manifolds », *Invent. Math.* **29** (1975), no. 3, p. 245–274.

[8] W. M. Goldman – « The symplectic nature of fundamental groups of surfaces », *Adv. in Math.* **54** (1984), no. 2, p. 200–225.

[9] ———, « Topological components of spaces of representations », *Invent. Math.* **93** (1988), no. 3, p. 557–607.

[10] W. M. Goldman et J. J. Millson – « The deformation theory of representations of fundamental groups of compact Kähler manifolds », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1988), no. 67, p. 43–96.

[11] R. C. Gunning – *Introduction to holomorphic functions of several variables. Vol. II*, The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, CA, 1990, Local theory.

[12] F. Labourie – « Existence d'applications harmoniques tordues à valeurs dans les variétés à courbure négative », *Proc. Amer. Math. Soc.* **111** (1991), no. 3, p. 877–882.

[13] J. Li – « The space of surface group representations », *Manuscripta Math.* **78** (1993), no. 3, p. 223–243.

[14] D. Luna – « Fonctions différentiables invariantes sous l'opération d'un groupe réductif », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **26** (1976), no. 1, p. ix, 33–49.

[15] J. Milnor – « On the existence of a connection with curvature zero », *Comment. Math. Helv.* **32** (1958), p. 215–223.

[16] D. Mumford, J. Fogarty et F. Kirwan – *Geometric invariant theory*, third éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)], vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[17] A. S. Rapinchuk, V. V. Benyash-Krivetz et V. I. Chernousov – « Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces », *Israel J. Math.* **93** (1996), p. 29–71.

[18] J.-P. Serre – « Cohomologie des groupes discrets », Prospects in mathematics (Proc. Sympos., Princeton Univ., Princeton, N.J., 1970), Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971, p. 77–169. Ann. of Math. Studies, No. 70.

[19] ______, *Cohomologie galoisienne*, fifth éd., Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[20] C. T. Simpson – « Higgs bundles and local systems », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1992), no. 75, p. 5–95.

[21] N. Steenrod – *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton Mathematical Series, vol. 14, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.

[22] D. Toledo – « Representations of surface groups in complex hyperbolic space », *J. Differential Geom.* **29** (1989), no. 1, p. 125–133.

[23] K. Yang – *Complex algebraic geometry*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 149, Marcel Dekker Inc., New York, 1991, An introduction to curves and surfaces, With an appendix by Robert Fisher.