COMPOSANTES DE HITCHIN ET REPRÉSENTATIONS HYPERCONVEXES DE GROUPES DE SURFACE

OLIVIER GUICHARD

Abstract. We show that the notion of hyperconvex representation due to F. Labourie gives a geometric characterization of the representations of a surface group in $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$ that belong to the Hitchin component.

Introduction

Le groupe Γ est le groupe fondamental d'une surface orientable Σ de genre g plus grand ou égal à deux. Dans son article [12], F. Labourie introduit la notion de représentation hyperconvexe :

> – une représentation ρ de Γ dans $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$ est dite hyperconvexe, s'il existe une courbe ρ-équivariante, du bord du groupe Γ dans l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbf{R}^n)$, qui est hyperconvexe, c'est-à-dire telle que n points deux à deux distincts de la courbe sont en somme directe (voir définition 2).

On dira aussi qu'une représentation ρ est n-fuchsienne si elle se factorise $\rho = \iota \circ \tau$, où ι est la représentation irréductible de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ dans $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$ et où τ est une représentation discrète cocompacte dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ (*i.e.* dans la composante de Teichmüller).

L'un des théorèmes principaux de l'article [12] est le résultat suivant :

Théorème. *(Labourie) Si ρ est une représentation de Γ dans le groupe $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$, qui peut être déformée continûment en une représentation n-fuchsienne, alors ρ est hyperconvexe.*

Le cas $n = 3$ est une conséquence des travaux de W. Goldman et S. Choi. Il y a une seule composante connexe dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_3(\mathbf{R}))$ qui contient les représentations fuchsiennes et cette composante est l'ensemble des holonomies de structures projectives *convexes* de la surface Σ (voir les deux articles [7], [4]). Pour une telle holonomie ρ, il existe un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}(\mathbf{R}^3)$, stable par $\rho(\Gamma)$ et dont le bord est de classe $\mathcal{C}^1$ et est la courbe (hyper)convexe ρ-invariante.

Lorsque $n \geq 3$, N. Hitchin ([10]) a calculé les composantes connexes de l'espace des représentations. Dans ce même article est expliquée la structure des composantes contenant les représentations n-fuchsiennes. Notons

$$\mathrm{Rep}\big(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})\big) := \mathrm{Hom}^{\mathrm{s.s.}}\big(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})\big)/\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$$

le quotient de l'ensemble des représentations semi-simples par l'action par conjugaison de $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$. Le quotient $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))/\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$ muni de la topologie quotient n'est pas séparé, par exemple l'image dans ce quotient d'une représentation à valeurs dans un sous-groupe unipotent est dans tous les voisinages de la représentation triviale. On peut alors considérer le séparé topologique de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$, c'est-à-dire cet espace où l'on a identifié deux points si l'un est dans tous les voisinages de l'autre. Ce séparé topologique s'identifie naturellement avec $\mathrm{Hom}^{\text{s.s.}}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))/\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$, ce qui justifie l'introduction de l'espace $\mathrm{Rep}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$. Par ailleurs $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$ et $\mathrm{Rep}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$ ont le même nombre de composantes connexes. Le point de vue de la théorie géométrique des invariants permet de donner à $\mathrm{Rep}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$ une structure de variété algébrique.

Théorème. *(Hitchin) Si n est pair (resp. impair) plus grand ou égal à trois, alors l'espace des représentations* $\mathrm{Rep}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$ *a six (resp. trois) composantes connexes. En outre, il y a exactement deux (resp. une) composantes connexes de* $\mathrm{Rep}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$ *contenant des représentations n-fuchsiennes.*

Chaque composante contenant des représentations n-fuchsiennes est homéomorphe à une boule de dimension $(2g-2)(n^2-1)$.

Ses composantes sont appelées *composantes de Teichmüller* dans l'article de N. Hitchin et *composantes de Hitchin* dans celui de F. Labourie. Nous suivrons cette dernière terminologie. Nous appelerons aussi composantes de Hitchin les composantes connexes de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$ qui s'envoient sur ces composantes connexes.

Le théorème de F. Labourie donne donc une propriété géométrique des représentations des composantes de Hitchin.

Nous nous proposons de montrer que cette propriété suffit pour caractériser les composantes de Hitchin, ce qui avait été conjecturé par F. Labourie dans [12] :

Théorème 1. *Si ρ est une représentation hyperconvexe de Γ dans* $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$*, alors ρ appartient à la (aux) composante(s) de Hitchin.*

Nou tenons à remercier ici Aurélien C. dont les questions incessantes ont rendu possible ce travail.

1. Notations et quelques rappels

1.1. **Représentations hyperconvexes.**

Le groupe Γ est un groupe hyperbolique et son bord à l'infini est un cercle qui sera noté $\partial\Gamma$ (voir [5] pour une introduction aux groupes hyperboliques).

Rappelons la définition des courbes hyperconvexes :

Définition 2. *Soit I un intervalle ou le cercle S^1, une application ξ^1 de I dans $\mathbb{P}(\mathbf{R}^n)$ est dite* hyperconvexe *si toutes les sommes de droites sont directes* *pour tous $x_1, \ldots, x_n$ des points de I deux à deux distincts,*

$$\mathbf{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \xi^1(x_i).$$

Les représentations hyperconvexes sont alors les représentations de Γ laissant invariant une courbe continue hyperconvexe de $\mathbb{P}(\mathbf{R}^n)$, plus précisément :

Définition 2. *Soit ρ représentation appartenant à* $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$*, ρ est dite* hyperconvexe *s'il existe une application continue ξ^1 de $\partial\Gamma$ dans $\mathbb{P}(\mathbf{R}^n)$ hyperconvexe et ρ-équivariante.*

C'est une conséquence de [12] que la courbe hyperconvexe invariante est unique et que son image est l'ensemble limite de l'action de Γ dans $\mathbb{P}(\mathbf{R}^n)$. Nous l'expliquerons aussi plus tard (propositions 16 et 17).

Exemples :

– Les représentations n-fuchsiennes sont hyperconvexes. Dans ces cas, le plongement de Veronese de $\mathbb{P}(\mathbf{R}^2)$ dans $\mathbb{P}(\mathbf{R}^n)$ est $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$-équivariant et est une courbe hyperconvexe. Rappelons que, si l'on identifie $\mathbf{R}^k$ aux polynômes homogènes de degré $k-1$ en deux variables X et Y, l'expression du plongement de Veronese est la suivante :
$$[aX + bY] \longmapsto [(aX + bY)^{n-1}].$$
De plus le bord du groupe s'identifie à $\mathbb{P}(\mathbf{R}^2)$.

– En dimension trois, les holonomies des structures projectives convexes sur une surface Σ de genre $g > 1$ sont bien hyperconvexes. En effet une telle holonomie ρ laisse invariant un ouvert convexe saillant Ω de l'espace projectif $\mathbb{P}^2(\mathbf{R})$. Cet ouvert est l'image du revêtement universel $\widetilde{\Sigma}$ par l'application développante. Le groupe Γ agit proprement sur Ω avec quotient compact et donc le bord du groupe $\partial\Gamma$ s'identifie au bord de l'ouvert $\partial\Omega$. L'application hyperconvexe est ici l'identification naturelle du bord du groupe $\partial\Gamma$ avec le bord du convexe $\partial\Omega$.

Ce dernier exemple justifie la terminologie «hyperconvexe». Une courbe hyperconvexe dans $\mathbb{P}^2(\mathbf{R})$ est une courbe convexe, strictement convexe dans une (toute) carte affine.

1.2. **Courbes Frenet.** Commençons par en donner la définition. La variété des drapeaux complets de $\mathbf{R}^n$ est notée $\mathcal{F}(\mathbf{R}^n)$.

Définition 3. *Soit I un intervalle ou le cercle S^1 et $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{n-1})$ une application de I dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}^n)$, alors ξ est dite* Frenet *si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

– Les sommes sont directes

pour tout $(n_1, \ldots, n_k)$ avec $n = n_1 + \cdots + n_k$ et pour tous $x_1, \ldots, x_k$ points de I deux à deux distincts, la somme suivante est directe

$$\mathbf{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} \xi^{n_i}(x_i).$$

– Les limites existent

pour tout $(m_1, \dots, m_k)$ *avec* $m = m_1 + \cdots + m_k \leq n$ *et pour tout* x *appartenant à* I

$$\lim_{(x_i)\to x} \bigoplus_{i=1}^{k} \xi^{m_i}(x_i) = \xi^m(x).$$

la limite étant prise sur les k*-uplets de points* $(x_1, \dots, x_k)$ *deux à deux distincts. En particulier* ξ *est continue.*

Par convention, si $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{n-1})$ est une courbe dans la variété des drapeaux, on posera $\xi^0 = \{0\}$ et $\xi^n = \mathbf{R}^n$.

Exemples : Au plongement de Veronese décrit tout à l'heure est naturellement associée une courbe Frenet. Si on identifie à nouveau $\mathbf{R}^k$ aux polynômes de degré $k-1$ en X et Y, alors $\xi^m([aX+bY])$ est le sous-espace vectoriel des polynômes divisibles par $(aX+BY)^{n-m}$.

Si une courbe $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{n-1})$ est Frenet, alors la courbe ξ^1 est hyperconvexe et de classe $\mathcal{C}^1$. De plus l'application ξ^1 détermine uniquement ξ par la condition sur les limites.

La proposition suivante nous permettra de travailler qui plus est avec des drapeaux complets dès que nous avons une représentation hyperconvexe.

Proposition 4. *([12] Théorème 6.1) Si une représentation* ρ *est hyperconvexe, alors il existe une courbe Frenet* $\xi : \partial\Gamma \to \mathcal{F}(\mathbf{R}^n)$ ρ*-équivariante.*

1.3. **Plan de la démonstration du théorème 1.** Le théorème que l'on veut démontrer s'énonce maintenant sous la forme suivante équivalente :

Théorème. *L'ensemble des représentations hyperconvexes est égal à la réunion des composantes de Hitchin.*

La stratégie générale est proche de celle de [12]. Décrivons la rapidement.

Nous travaillons dans la suite avec l'espace $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$. Cet espace a le même nombre de composantes connexes que $\mathrm{Rep}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$. Une ou deux de ces composantes, selon la parité de n, contiennent des représentations n-fuchsiennes.

1.3.1. *Ouverture.* On montrera d'abord l'ouverture des représentations hyperconvexes dans l'espace $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$. Dans [12] est démontrée l'ouverture des représentations hyperconvexes vérifiant une hypothèse supplémentaire (propriété (H)). Cette ouverture est démontrée dans la partie 5 et fait appel à la définition intermédiaire de représentation d'Anosov (partie 2). Une étape technique importante est le résultat de la partie 4.

1.3.2. *Fermeture dans les irréductibles.* Dans les paragraphes 9.3 à 9.5 de [12], F. Labourie montre qu'une représentation *fortement irréductible*, qui est limite de représentations hyperconvexes, est elle-même hyperconvexe.

1.3.3. *Ouverture de l'adhérence.* Ceci nous amène à considérer $\overline{H}$ l'adhérence des représentations hyperconvexes dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$. Le résultat principal de [8] permet de montrer que $\overline{H}$ est ouvert et donc est une réunion de composantes connexes de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$.

Par ailleurs, les travaux de Hitchin [10] montrent que les composantes connexes de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$ autres que la (les) composante(s) de Hitchin contiennent des représentations à valeurs dans le groupe compact $\mathrm{PSO}_n(\mathbf{R})$. De telles représentations ne peuvent pas être limites de représentations hyperconvexes.

L'adhérence $\overline{H}$ est donc égale à la réunion des composantes de Hitchin. Or, toujours d'après Hitchin, ces composantes sont constituées de représentations fortement irréductibles, ce qui donne bien que l'ensemble des représentations hyperconvexes est égal à la réunion de ces composantes.

Nous rappelons dans la suite de cette partie quelques définitions communes.

1.4. **Grassmaniennes.** La grassmanienne des k-plans de $\mathbf{R}^n$ est notée $\mathrm{Gr}^k(\mathbf{R}^n)$ et celle des k-plans orientés, $\mathrm{Gr}_+^k(\mathbf{R}^n)$. Ce sont des $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$-espaces homogènes compacts. Etant donnée une norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur $\mathbf{R}^n$, on peut définir une distance sur $\mathrm{Gr}^k(\mathbf{R}^n)$

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Gr}^k(\mathbf{R}^n)}(E,F) := \max\Big(\max_{z\in E, \|z\|=1} \mathrm{d}(z,F), \max_{z\in F, \|z\|=1} \mathrm{d}(z,E)\Big),$$

où $\mathrm{d}(z,F)$ est la distance entre z et l'ensemble F

$$\mathrm{d}(z,F) := \min_{z'\in F} \|z-z'\|.$$

Comme il existe une isométrie de $\mathbf{R}^n$ qui échange E et F, la distance peut s'exprimer

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Gr}^k(\mathbf{R}^n)}(E,F) = \max_{z\in E, \|z\|=1} \mathrm{d}(z,F).$$

On fixera une telle structure euclidienne pour toute la suite. On adoptera aussi la convention consistant à écrire les dimensions des espaces vectoriels en exposant : un élément de $\mathrm{Gr}^k(\mathbf{R}^n)$ sera noté E^k, un élément de $\mathrm{Gr}_+^k(\mathbf{R}^n)$ sera noté E_+^k et le k-plan associé à E_+^k sera noté E^k.

1.5. **Orientations.** Précisons les conventions d'orientations utilisées ici.

Une orientation E_+, ou E_{+1}, sur un espace vectoriel est le choix d'une classe d'équivalence de bases de E. On note E_{-1} le même espace muni de l'orientation opposée.

Si E et F sont orientés et en somme directe, alors $E \oplus F$ est orienté par une base directe de E suivie d'une base directe de F. On a la formule

$$F_+ \oplus E_+ = (E_+ \oplus F_+)_{(-1)^{\dim E \times \dim F}}.$$

Si $\mathbf{R}^n$ est orienté et $E + F = \mathbf{R}^n$, alors $E \cap F$ est aussi canoniquement orienté.

1.6. **Action de Γ sur son bord.** Si γ est un élément de Γ différent de l'identité, alors l'action de γ sur le bord $\partial\Gamma$ a exactement deux points fixes, x_+ et x_-. L'un, x_+, est attracteur, c'est-à-dire pour tout x de $\partial\Gamma$, $x \neq x_-$, on a

$$\lim_{q\to+\infty} \gamma^q \cdot x = x_+.$$

L'autre, x_-, est répulseur.

On notera $\mathrm{d}_{\partial\Gamma}$ une distance définissant la topologie sur le bord $\partial\Gamma$.

1.7. **Flot géodésique sur la surface.** Dans ce paragraphe nous rappelons les propriétés du flot géodésique sur le fibré tangent unitaire $\mathrm{S}\Sigma$ sur la surface et les liens avec le bord du groupe $\partial\Gamma$.

1.7.1. *Le flot géodésique.* Notons $\widetilde{\Sigma}$ le revêtement universel de la surface Σ. Identifions, pour un instant, ce revêtement universel au demi-plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ et le groupe Γ à un sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$. La surface Σ s'identifie alors au quotient $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ et le bord de Γ à $\mathbb{P}^1(\mathbf{R})$.

Cette structure riemannienne permet de munir les fibrés en cercles $\mathrm{S}\Sigma$ et $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$ du flot géodésique $(\phi^t)_{t\in\mathbf{R}}$.

1.7.2. *Géodésiques.* L'ensemble des géodésiques orientées de $\widetilde{\Sigma}$ s'identifie alors aux couples de points distincts (x_+, x_-) du bord $\mathbb{P}^1(\mathbf{R}) = \partial\Gamma$, *i.e.* à une géodésique on associe ses extrémités. Cette identification est compatible avec l'action de Γ.

De plus, le choix d'une orientation sur $\mathbb{P}^1(\mathbf{R}) = \partial\Gamma$ (on fixe pour toute la suite du texte une telle orientation) permet de définir la notion de triplet orienté de $\partial\Gamma$. On écrira $x_+ > x_0 > x_-$ si (x_+, x_0, x_-) est un triplet orienté. Un k-uplet $(y_1, \dots, y_k)$ sera dit orienté ($k \geq 3$) si $y_1 > y_2 > \cdots > y_k$.

Le fibré en cercles $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$ s'identifie alors à l'ensemble des triplets orientés

$$\mathrm{S}\widetilde{\Sigma} = \partial\Gamma^{3+} := \{(x_+, x_0, x_-) \in \partial\Gamma^3 \text{ tel que } x_+ > x_0 > x_-\},$$

et donc le fibré $\mathrm{S}\Sigma$ s'identifie au quotient

$$\mathrm{S}\Sigma = \Gamma\backslash\partial\Gamma^{3+}.$$

Aussi la géodésique passant par $\omega = (x_+, x_0, x_-)$ se décrit de la manière suivante

$$\mathcal{L}_\omega = \{(y_+, y_0, y_-) \in \partial\Gamma^{3+} \text{ tel que } y_+ = x_+,\ y_- = x_-\}.$$

1.7.3. *Hyperbolicité du flot.* Le flot géodésique sur $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$ et sur $\mathrm{S}\Sigma$ est un flot d'Anosov (voir [11] pour la définition des flots d'Anosov). Plus précisément les feuilles centrales stable et instable passant par $\omega = (x_+, x_0, x_-)$ sont

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^-_\omega &= \{(y_+, y_0, y_-) \in \partial\Gamma^{3+} \text{ tel que } y_+ = x_+\}, \\ \mathcal{F}^+_\omega &= \{(y_+, y_0, y_-) \in \partial\Gamma^{3+} \text{ tel que } y_- = x_-\}. \end{aligned}$$

L'ensemble des feuilles centrales (in)stables pour le flot géodésique agissant sur $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$ est naturellement identifié au bord $\partial\Gamma$.

2. Structure d'Anosov

Nous rappelons ici les structures géométriques que F. Labourie associe aux représentations hyperconvexes ainsi que quelques propriétés qui découlent immédiatement des définitions. Nous commencerons par donner la définition qui sera la plus manipulée dans la suite du texte avant de donner une définition plus sujette à généralisation.

2.1. 2-hyperconvexité. Une courbe dans la variété des drapeaux est 2-hyperconvexe si deux points distincts sont des drapeaux en position général.

Définition 5. *Soit* $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{n-1})$ *une courbe continue de* I *dans la variété des drapeaux* $\mathcal{F}(\mathbf{R}^n)$*, où* I *est un intervalle ou le cercle. L'application* ξ *est dite* 2-hyperconvexe *si*
pour tout $k = 1, \ldots, n-1$ *et pour tous* $x \neq y$ *dans* I*,* $\mathbf{R}^n = \xi^k(x) \oplus \xi^{n-k}(y)$.

Comme plus haut la notion de représentation 2-hyperconvexe est définie de manière similaire.

Définition 5. *Soit* ρ *une représentation de* Γ *dans* $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$*, la représentation* ρ *est dite* 2-hyperconvexe *s'il existe une courbe* ξ*, de* $\partial\Gamma$ *dans la variété des drapeaux* $\mathcal{F}(\mathbf{R}^n)$*,* ρ*-équivariante et* 2*-hyperconvexe.*

Les représentations hyperconvexes sont évidemment 2-hyperconvexes.

2.2. Fibrés en droites associés. A une représentation 2-hyperconvexe vont être associés des fibrés de bases $\mathrm{S}\Sigma$ et $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$. Ces fibrés viendront avec une action du flot géodésique et serviront pour la définition de représentation d'Anosov au paragraphe suivant.

2.2.1. *Fibrés associés à une courbe.* On décrit d'abord la construction de ces fibrés à partir de la donnée d'une courbe 2-hyperconvexe.

Soit ξ une courbe 2-hyperconvexe du bord $\partial\Gamma$ dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}^n)$, on pose, pour tous $x_+ \neq x_-$ dans $\partial\Gamma$ et $i = 1, \ldots, n$

$$V_i(x_+, x_-) := \xi^i(x_+) \cap \xi^{n-i+1}(x_-).$$

Rappelons que nous avons fixé par convention $\xi^n = \mathbf{R}^n$. Ceci permet de définir un fibré en droites, encore noté V_i, sur la base $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$ par :

pour tout $\omega = (x_+, x_0, x_-)$ point de $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$, la fibre en ω est $(V_i)_\omega := V_i(x_+, x_-) = \xi^i(x_+) \cap \xi^{n-i+1}(x_-)$.

Ces fibrés en droites V_i sont des sous-fibrés continus du fibré vectoriel plat $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma} \times \mathbf{R}^n$. De plus le flot géodésique sur $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$ se relève, grâce à la connexion plate, en un flot sur $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma} \times \mathbf{R}^n$, que l'on notera encore ϕ^t. Les sous-fibrés V_i sont stables par ce flot ϕ^t.

Le flot s'explicite simplement, si ψ appartient à $(V_i)_\omega$, pour tout t

$$\phi^t \cdot \psi = \psi \text{ appartenant à } (V_i)_{\phi^t \cdot \omega}.$$

Les fibrés $V_1, \ldots, V_n$ sont en somme directe

$$\mathbf{R}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n,$$

et ceci permet donc de définir les fibrés en droites duaux, qui sont des sous-fibrés du fibré $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma} \times (\mathbf{R}^n)^*$

$$(\mathbf{R}^n)^* = V_1^* \oplus \cdots \oplus V_n^*,$$

en fait

$$V_i^* = \Big(\bigoplus_{j \neq i} V_j \Big)^{\perp}.$$

On peut aussi donner une définition directe de V_i^*, pour $\omega = (x_+, x_0, x_-)$ dans $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$

$$(V_i^*)_\omega = \xi^{i-1}(x_+)^{\perp} \cap \xi^{n-i}(x_-)^{\perp}.$$

2.2.2. *Fibrés associés à une représentation.* Soit ρ une représentation 2-hyperconvexe et ξ la courbe invariante associée.

Comme $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$ agit par conjugaison sur l'espace vectoriel $\mathrm{End}(\mathbf{R}^n)$ des endomorphismes de $\mathbf{R}^n$, le groupe Γ agit sur le fibré plat $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma} \times \mathrm{End}(\mathbf{R}^n)$. Pour cette action, les sous-fibrés $V_i^* \otimes V_j \simeq \mathcal{L}(V_i, V_j)$ sont stables. On obtient, par passage au quotient, des fibrés sur la base $\mathrm{S}\Sigma$ que l'on notera encore $V_i^* \otimes V_j$.

L'action diagonale de Γ sur le fibré $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma} \times \mathrm{End}(\mathbf{R}^n)$ commute avec le flot géodésique, donc le flot passe au quotient pour définir un flot sur le fibré quotient $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma} \times_\rho \mathrm{End}(\mathbf{R}^n) = \Gamma \backslash \mathrm{S}\widetilde{\Sigma} \times \mathrm{End}(\mathbf{R}^n)$. Les sous-fibrés $V_i^* \otimes V_j$ sont stables par le flot. Dit autrement, la connexion plate sur le fibré $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma} \times_\rho \mathrm{End}(\mathbf{R}^n)$ permet de relever le flot géodésique sur $\mathrm{S}\Sigma$ à ce fibré et les sous-fibrés $V_i^* \otimes V_j$ sont évidemment stables par ce flot. On notera aussi ϕ^t le flot ainsi défini.

Une dernière remarque est que le fibré $V_i^* \otimes V_i$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma} \times \mathbf{R}$ avec l'action triviale de Γ (et aussi avec action triviale du flot). Ce qui prouve que, sur la base $\mathrm{S}\Sigma$, le fibré $V_i^* \otimes V_i$ est isomorphe à $\mathrm{S}\Sigma \times \mathbf{R}$. Aussi, on a les isomorphismes naturels suivants :

$$\text{pour tous } i,\ j \text{ et } k,\ V_i^* \otimes V_k \simeq \big(V_i^* \otimes V_j\big) \otimes \big(V_j^* \otimes V_k\big),$$

ces isomorphismes sont compatibles avec les actions du flot et de Γ.

2.3. **Représentations d'Anosov.** Nous allons utiliser ces fibrés en droites pour définir les représentations d'Anosov.

Définition 6. *Soit ρ une représentation 2-hyperconvexe du groupe Γ dans $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$ et soient $V_i^* \otimes V_j$ les fibrés en droites sur la base $\mathrm{S}\Sigma$ définis au paragraphe précédent. On dira que la représentation ρ est* d'Anosov*, si*

- *pour tous $i > j$, l'action du flot sur le fibré $V_i^* \otimes V_j$ est contractante,*
- *et pour tous $i < j$, l'action sur $V_i^* \otimes V_j$ est dilatante.*

Le fibré $V_i^* \otimes V_j$ est contracté (resp. dilaté) par le flot s'il existe une métrique continue $\| \cdot \|$ sur $V_i^* \otimes V_j$ et des constantes A et a telles que

$$\text{pour tout } t > 0,\ \omega \in \mathrm{S}\Sigma \text{ et } \psi \in (V_i^* \otimes V_j)_\omega,$$

$$\|\phi^t \cdot \psi\|_{\phi^t\cdot\omega} \leq Ae^{-at}\|\psi\|_\omega \quad \text{(resp.}$$
$$\|\phi^{-t} \cdot \psi\|_{\phi^t\cdot\omega} \leq Ae^{-at}\|\psi\|_\omega).$$

Comme $\mathrm{S}\Sigma$ est compacte, les propriétés de contraction ne dépendent pas de la métrique sur le fibré.

De plus les remarques de la fin du paragraphe précédent donnent, pour tous i, j, k

$$V_i^* \otimes V_j \text{ est contracté} \Leftrightarrow V_j^* \otimes V_i \text{ est dilaté.}$$
$$V_i^* \otimes V_j \text{ et } V_j^* \otimes V_k \text{ sont contractés} \Rightarrow V_i^* \otimes V_k \text{ est contracté.}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une représentation soit d'Anosov est donc que le flot sur le fibré $V_{i+1}^* \otimes V_i$ est contractant pour $i = 1, \ldots, n-1$.

En pratique, nous vérifierons que les fibrés $V_i^* \otimes V_j$ *sur la base* $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$ sont contractés pour une métrique Γ-*invariante*.

2.4. **Propriétés des représentations d'Anosov.** Commençons tout d'abord par donner quelques conséquences immédiates des définitions.

Proposition 7. *Si ρ est une représentation 2-hyperconvexe, alors, pour tout γ dans Γ, $\rho(\gamma)$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.*

Démonstration : Soit $\gamma \neq \mathrm{id}$ un élément de Γ. L'action de γ sur le bord $\partial\Gamma$ a deux points fixes x_+ et x_-. Les drapeaux opposés $\xi(x_+)$ et $\xi(x_-)$ sont invariants par $\rho(\gamma)$. Les droites

$$V_i := \xi^i(x_+) \cap \xi^{n-i+1}(x_-), \text{ pour } i = 1, \ldots, n,$$

sont donc propres pour $\rho(\gamma)$ et sont en somme directe. *q.e.d.*

Les représentations d'Anosov sont aussi purement loxodromique :

Proposition 8. *Si ρ est une représentation d'Anosov, alors, pour tout γ dans $\Gamma - \{\mathrm{id}\}$, $\rho(\gamma)$ est loxodromique.*

Démonstration : Pour un tel γ, notons x_+ le point fixe attracteur de γ sur le bord $\partial\Gamma$ et x_- le point fixe répulseur. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées aux droites propres $V_1, \ldots, V_n$, $V_i = \xi^i(x^+) \cap \xi^{n-i+1}(x^-)$.

Soit aussi x_0 un point de $\partial\Gamma$ tel que $\omega = (x_+, x_0, x_-)$ est un triplet orienté, donc un point de $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$. Si on pose

$$\omega_q := \gamma^q \cdot \omega = (x_+, \gamma^q \cdot x_0, x_-),$$

alors la suite $(\gamma^q \cdot x_0)$ tend vers x_+ et la suite réelle (t_q), définie par $\phi^{t_q} \cdot \omega_0 = \omega_q$, tend vers l'infini.

Soit $i > j$.

Soit ψ un élément de $V_i^*(x_+) \otimes V_j(x_-)$. Cet élément ψ s'identifie alors à un élément ψ_q de la fibre $(V_i^* \otimes V_j)_{\omega_q}$, de sorte que $\psi_q = \phi^{t_q} \cdot \psi_0$ (voir la construction du flot en 2.2). La contraction du flot implique

$$\|\psi_q\|_{\omega_q} \xrightarrow{q\to+\infty} 0.$$

Par Γ-invariance, on a les égalités

$$\|\psi_0\|_\omega = \|\rho(\gamma^q)\cdot\psi_0\|_{\gamma^q\cdot\omega} = \|(\frac{\lambda_j}{\lambda_i})^q\psi_q\|_{\omega_q}.$$

Ce qui implique que $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right| > 1$, et on a bien $|\lambda_1| > \cdots > |\lambda_n|$. *q.e.d.*

Corollaire 9. *Si ρ est une représentation d'Anosov, alors la courbe 2-hyperconvexe permettant de définir la structure d'Anosov est unique.*

On parlera donc de *la courbe associée* à une représentation d'Anosov.

Démonstration : En effet, soit $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{n-1})$ une telle courbe. Par hypothèse ξ est continue et il suffit donc de vérifier son unicité sur un ensemble dense.

La démonstration de la proposition précédente montre que, si x_+ est le point fixe attracteur de $\gamma \neq \mathrm{id}$, alors $\xi^i(x_+)$ est la somme des droites propres associées aux i premières valeurs propres de $\rho(\gamma)$ (les valeurs propres étant ordonnées par module décroissant). La densité de ces points attracteurs permet de conclure. *q.e.d.*

2.5. **Définition équivalente.** Nous relions, dans ce paragraphe, la définition de représentation d'Anosov avec des notions un peu plus classiques.

Soit D un sous-groupe diagonalisable maximal de $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$ (*i.e.* le sous-groupe des matrices diagonales dans une certaine base). Le quotient $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})/D$ est l'espace des décompositions en droites de $\mathbf{R}^n$

$$M := \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})/D \simeq \Big\{(V_1, \ldots, V_n) \in \mathbb{P}(\mathbf{R}^n)^n \text{ tel que } V_1 \oplus \cdots \oplus V_n = \mathbf{R}^n\Big\}.$$

Si $x = (V_1, \ldots, V_n)$ est un point de M, l'espace tangent à M en x s'identifie naturellement à

$$(\diamond) \qquad \mathrm{T}_x M = \bigoplus_{i\neq j} \mathcal{L}(V_i, V_j).$$

Soit ρ une représentation de Γ dans $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$, le groupe Γ agit donc sur $M = \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})/D$. On considère alors le M-fibré

$$M_\rho := \widetilde{\mathrm{S}\Sigma} \times_\rho M$$

sur la base $\mathrm{S}\Sigma$. A nouveau, la connexion plate sur ce fibré M_ρ permet de relever le flot géodésique en un flot ϕ^t sur M_ρ.

Si ω est un point de $\mathrm{S}\Sigma$, notons $M_\omega \simeq M$ la fibre en ce point et si x appartient à M_ω, alors la connexion sur M_ρ permet d'écrire la décomposition suivante de l'espace tangent

$$\mathrm{T}_x M_\rho = \mathrm{T}_x M_\omega \oplus \mathrm{T}_x \mathrm{S}\Sigma,$$

et comme dans l'égalité $(\diamond)$, on obtient une décomposition en droites de l'espace tangent à la fibre :

$$\mathrm{T}_x M_\omega = \bigoplus_{i\neq j} \mathcal{L}_{i,j}.$$

Ceci définit des sous-fibrés en droites $\mathcal{L}_{i,j}$ du fibré tangent $\mathrm{T}M_\rho$, qui sont stables par le transport parallèle de la connexion sur $\mathrm{T}M_\rho$. Ils sont donc stables par le flot ϕ^t.

On a aussi les isomorphismes suivants, pour tout i, j, k

$$(\blacklozenge) \qquad \mathcal{L}_{i,j} \otimes \mathcal{L}_{j,i} \simeq \mathbf{R},\ \mathcal{L}_{i,k} \otimes \mathcal{L}_{k,j} \simeq \mathcal{L}_{i,j}.$$

On notera π la projection de M_ρ sur $\mathrm{S}\Sigma$.

Nous pouvons donner une définition équivalente des représentations d'Anosov. Commençons d'abord par redonner la définition des fermés hyperboliques.

Définition 10. *Soit W une variété et ϕ^t un flot sur W défini par un champ de vecteur X. Soit aussi $\|\cdot\|_W$ une métrique continue sur le fibré tangent $\mathrm{T}W$.*

Un fermé F invariant par le flot est hyperbolique *s'il existe une décomposition continue du fibré $\mathrm{T}W_{|F} = E^+ \oplus \mathbf{R}X \oplus E^-$ invariante par le flot et s'il existe des constantes A et a telles que, pour tout $t > 0$, v^+ dans E^+, v^- dans E^-, on a les inégalités*

$$\|\mathrm{D}\phi^{-t}(v^+)\|_W \leq Ae^{-at}\|v^+\|_W \quad \textit{et} \quad \|\mathrm{D}\phi^t(v^-)\|_W \leq Ae^{-at}\|v^-\|_W.$$

Proposition 11. *Soit ρ une représentation de Γ dans $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$.*

La représentation ρ est d'Anosov si, et seulement si, il existe une section continue σ du fibré M_ρ invariante par le flot et hyperbolique.

C'est-à-dire $\sigma : \mathrm{S}\Sigma \to M_\rho$ vérifie $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}$, $\sigma(\mathrm{S}\Sigma)$ est invariant par le flot et est un fermé hyperbolique pour le flot.

Une telle section $\sigma : \mathrm{S}\Sigma \to M_\rho$ est équivalente à la donnée d'une section $\tilde{\sigma} : \mathrm{S}\widetilde{\Sigma} \to \mathrm{S}\widetilde{\Sigma} \times M$, Γ-équivariante et invariante par le flot, autrement dit à une fonction

$$\tilde{\sigma} : \mathrm{S}\widetilde{\Sigma} \longrightarrow M$$

Γ-équivariante et constante sur les orbites du flot géodésique, qu'on peut considérer encore comme une fonction Γ-équivariante

$$\partial^2\Gamma := \big\{(x_+, x_-) \in (\partial\Gamma)^2 \text{ tel que } x_+ \neq x_-\big\} \xrightarrow{\sigma} M$$

car les orbites du flot sont paramétrées par l'ensemble de ces couples (Ce point de vue permet de faire le lien avec la définition des représentations d'Anosov de [12] en terme d'holonomie et d'application développante).

Démonstration de la proposition : Supposons que σ est une section hyperbolique de M_ρ, ce qui signifie que l'espace tangent à M_ρ en un point x de $\sigma(\mathrm{S}\Sigma)$ se décompose en

$$\mathrm{T}_x M_\rho = E^+ \oplus \mathbf{R}X_x \oplus E^-,$$

où X est le champ de vecteurs qui engendre le flot (ϕ^t), X_x appartient à $\mathrm{T}_x\mathrm{S}\Sigma$, E^+ et E^- sont des sous-distributions du fibré tangent, définies sur le fermé $\sigma(\mathrm{S}\Sigma)$, l'une est dilatée par le flot et l'autre contractée.

Les sous-fibrés en droites $\mathcal{L}_{i,j}$ sont aussi stables par le flot et leurs restrictions à $\sigma(\mathrm{S}\Sigma)$ sont donc des sous-fibrés de E^+ ou de E^-. On sait alors que $\mathcal{L}_{i,j}$ est contracté ou dilaté.

Les isomorphismes (♦) sur ces fibrés en droites $\mathcal{L}_{i,j}$ montrent que la relation

$$i \top j \ \Leftrightarrow \text{« la restriction de } \mathcal{L}_{i,j} \text{ à } \sigma(\mathrm{S}\Sigma) \text{ est dilatée. »}$$

est une relation d'ordre totale sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Quitte à réindexer, on peut supposer que

$$\mathcal{L}_{i,j} \text{ est dilaté si, et seulement si, } i < j.$$

La section σ donne une fonction continue Γ-invariante

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} : \partial^2\Gamma &\longrightarrow M \\ y &\longmapsto (D_1(y), \dots, D_n(y)), \end{aligned}$$

ce qui nous permet de définir deux fonctions, Γ-équivariantes, dans la variété des drapeaux

$$\begin{aligned} \xi^+ : \partial^2\Gamma &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{R}^n) \\ y &\longmapsto \big(D_1(y), \dots, D_1(y) \oplus \dots \oplus D_{n-1}(y)\big) \\ \text{et } \xi^- : \partial^2\Gamma &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{R}^n) \\ y &\longmapsto \big(D_n(y), \dots, D_2(y) \oplus \dots \oplus D_n(y)\big). \end{aligned}$$

Il est aussi facile de voir (comme dans la démonstration de la proposition 8) que, si γ est un élément de $\Gamma - \{\mathrm{id}\}$, avec x_+ et x_- ses points fixes, alors la droite $D_i(x_+, x_-)$ est une droite propre pour $\rho(\gamma)$ de valeur propre λ_i et qu'aussi $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n|$.

Donc $\xi^+(x_+, x_-)$ est le drapeau attracteur de $\rho(\gamma)$, $\xi^-(x_+, x_-)$ est le drapeau répulseur.

Soit x un point de $\partial\Gamma$ différent de x_+, par continuité,

$$\rho(\gamma)^{-q} \cdot \xi^+(x_+, x) \xrightarrow{q \to +\infty} \xi^+(x_+, x_-)$$

ce qui impose, comme $\xi^+(x_+, x_-)$ est le drapeau répulseur de $\rho(\gamma)^{-1}$,

$$\xi^+(x_+, x) = \xi^+(x_+, x_-),$$

c'est-à-dire que la fonction ξ^+ ne dépend que de x_+ et elle définit donc une fonction, notée encore ξ^+, sur $\partial\Gamma$. De même ξ^- ne dépend que de x_- et définit une fonction sur le bord $\partial\Gamma$. On sait maintenant que $\xi^+(x_+)$ est le drapeau attracteur de $\rho(\gamma)$ et que $\xi^-(x_+)$ est le drapeau répulseur de $\rho(\gamma)^{-1}$. En conséquence les deux fonctions coïncident.

Si l'on note $\xi := \xi^+ = \xi^-$, alors ξ est 2-hyperconvexe. Les fibrés $V_i^* \otimes V_j$, associés à la représentation 2-hyperconvexe ρ, s'identifient canoniquement aux restrictions des fibrés $\mathcal{L}_{i,j}$ à $\sigma(\mathrm{S}\Sigma)$. Les propriétés de contraction de la définition de représentation d'Anosov (définition 6) sont donc vérifiées pour ρ.

Réciproquement soit ρ une représentation d'Anosov et ξ la courbe associée. La 2-hyperconvexité permet de définir une section du fibré M_ρ par

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} : \mathrm{S}\widetilde{\Sigma} &\longrightarrow M \\ (x_+, x_0, x_-) &\longmapsto (V_1(x_+, x_-), \dots, V_n(x_+, x_-)). \end{aligned}$$

Toujours avec $V_i = \xi^i(x^+) \cap \xi^{n-i+1}(x^-)$. L'identification de la restriction des fibrés $\mathcal{L}_{i,j}$ à $\sigma(\mathrm{S}\Sigma)$ avec les fibrés $V_i^* \otimes V_j$ montre que le fermé $\sigma(\mathrm{S}\Sigma)$ est hyperbolique. *q.e.d.*

2.6. **Ouverture des représentations d'Anosov.** L'ensemble des représentations d'Anosov est un ouvert de l'ensemble des représentations.

Théorème 12. *([12] proposition 2.1) Soit ρ une représentation. Si ρ est d'Anosov, il existe alors un voisinage U de ρ dans* $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$ *composé de représentations d'Anosov.*

De plus si $\xi_{\rho'}$ est la courbe 2-hyperconvexe associée à ρ' dans U, alors l'application

$$\begin{aligned} U \times \partial\Gamma &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{R}^n) \\ (\rho', x) &\longmapsto \xi_{\rho'}(x) \end{aligned}$$

est continue.

3. Propriétés des représentations hyperconvexes

Nous donnons quelques-unes des propriétés les plus remarquables de ces représentations, en particulier qu'elles sont d'Anosov.

3.1. Premières propriétés.

3.1.1. *Stabilité par transpositions.*

Proposition 13. *Soit ρ une représentation hyperconvexe, alors sa représentation duale ${}^t\rho$ est aussi hyperconvexe.*

Démonstration : Si $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{n-1})$ est la courbe associée à ρ, il faut montrer que la courbe $\xi^\perp = (\xi^{n-1,\perp}, \dots, \xi^{1,\perp})$ de $\partial\Gamma$ dans $\mathcal{F}((\mathbf{R}^n)^*)$ est une courbe Frenet, c'est précisément le théorème 2 de [9]. *q.e.d.*

3.1.2. *Irréductibilité.*

Proposition 14. *Soit ρ une représentation hyperconvexe, alors ρ est fortement irréductible, c'est-à-dire la restriction de ρ à tout sous-groupe d'indice fini est irréductible.*

Cette proposition est en fait conséquence de la proposition suivante, un peu plus générale :

Proposition 15. *Soit ρ une représentation hyperconvexe. Si Δ est un sous-groupe de Γ, dont l'action sur $\partial\Gamma$ est minimale (Les seuls fermés invariants par Δ sont l'ensemble vide et le bord $\partial\Gamma$), alors la restriction de ρ au sous-groupe Δ est irréductible.*

Les sous-groupes d'indices finis agissent bien de manière minimale sur $\partial\Gamma$, mais également tout sous-groupe distingué non trivial.

Démonstration : Soit E un sous-espace Δ-invariant. L'ensemble

$$\left\{x \in \partial\Gamma \text{ tel que } \xi^1(x) \subset E\right\}$$

est un fermé Δ-invariant. Soit c'est $\partial\Gamma$, donc E contient

$$\sum_{x\in\partial\Gamma} \xi^1(x)$$

et, par hyperconvexité de ξ^1, E est égal à $\mathbf{R}^n$.

Soit cet ensemble est vide, alors l'ensemble

$$\left\{x \in \partial\Gamma \text{ tel que } E \subset \xi^{n-1}(x)\right\}$$

est un fermé Δ-invariant du bord $\partial\Gamma$ et est non vide : en effet, soit $\gamma \neq \mathrm{id}$ dans Δ, x_+ et x_- les points fixes de γ dans $\partial\Gamma$, comme E est invariant par $\rho(\gamma)$, il est somme d'espaces propres pour $\rho(\gamma)$, *i.e.*

$$E = E \cap \xi^{n-1}(x_+) \oplus E \cap \xi^1(x_-) = E \cap \xi^{n-1}(x_+),$$

donc $E \subset \xi^{n-1}(x_+)$. Ainsi E est contenu dans l'intersection

$$\bigcap_{x\in\partial\Gamma} \xi^{n-1}(x).$$

Cette intersection est triviale, son orthogonal étant

$$\sum_{x\in\partial\Gamma} \xi^{n-1,\perp}(x) = (\mathbf{R}^n)^*,$$

car $\xi^{n-1,\perp}$ est aussi hyperconvexe par la proposition 13, donc E est réduit à $\{0\}$. *q.e.d.*

3.1.3. *Unicité de la courbe.*

Proposition 16. *Si ρ est une représentation hyperconvexe, alors il existe une unique courbe continue ρ-équivariante, ξ^1 du bord $\partial\Gamma$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbf{R}^n)$.*

Contrairement au corollaire 9 qui prouvait l'unicité de la courbe associée à une représentation d'Anosov, aucune hypothèse de contraction n'est faite ici.

Démonstration : Une telle courbe ξ^1 est entièrement déterminée par sa restriction à un ensemble dense, ici l'ensemble des points fixes attracteurs des éléments de Γ.

L'espace suivant

$$\sum_{x\in\partial\Gamma} \xi^1(x)$$

est invariant par Γ, il est donc égal à $\mathbf{R}^n$ par irréductibilité.

Soit $\gamma \neq \mathrm{id}$ un élément de Γ et soient x_+ et x_- ses points fixes attracteur et répulseur.

L'élément $\rho(\gamma)$ est loxodromique. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres avec $|\lambda_1| > \cdots > |\lambda_n|$ et $V_1, \ldots, V_n$ les droites propres associées. On veut montrer l'égalité

$$\xi^1(x_+) = V_1.$$

La droite $\xi^1(x_+)$ est une droite propre de $\rho(\gamma)$, il existe alors i tel que $\xi^1(x_+) = V_i$. Si $x \neq x_-$ est un point de $\partial\Gamma$, par continuité

$$\lim_{q \to +\infty} \rho(\gamma)^q \cdot \xi^1(x) = \lim_{q \to +\infty} \xi^1(\gamma^q \cdot x) = \xi^1(x_+),$$

ce qui implique que

$$\xi^1(x) \subset \bigoplus_{j \geq i} V_j,$$

et donc

$$\mathbf{R}^n = \sum_{x \neq x_-} \xi^1(x) \subset \bigoplus_{j \geq i} V_j,$$

l'égalité ci-dessus vaut par continuité de ξ^1. Ce qui prouve que $i = 1$ et donc $\xi^1(x_+) = V_1$. *q.e.d.*

Dans le même ordre d'idées, nous avons aussi la proposition :

Proposition 17. *Soit ρ une représentation hyperconvexe, alors l'ensemble limite de $\rho(\Gamma)$ dans $\mathbb{P}(\mathbf{R}^n)$ est l'image de la courbe ξ^1.*

Démonstration : Par définition, l'ensemble limite est l'intersection des fermés invariant non vides.

L'ensemble limite est non vide car la représentation ρ est proximale. De plus cet ensemble est exactement l'adhérence des points attracteurs des éléments proximaux de Γ, c'est-à-dire le fermé $\xi^1(\partial\Gamma)$. *q.e.d.*

De même, l'ensemble limite dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}^n)$ est l'image de ξ.

3.2. **Une représentation hyperconvexe est d'Anosov.**

Proposition 18. *(*[12] *Théorème 4.2) Soit ρ une représentation hyperconvexe de Γ dans $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$, alors la représentation ρ est d'Anosov.*

Nous reproduisons la démonstration pour la commodité du lecteur.

Démonstration : Soit ξ la courbe Frenet associée à ρ. Il est évident que ξ est 2-hyperconvexe et donc que la représentation ρ est 2-hyperconvexe. Il reste à montrer les propriétés de la définition 6, *i.e.* définir des métriques Γ-invariantes sur les fibrés $V_i^* \otimes V_j$ et montrer la contraction du flot.

Fixons donc $i > j$.

Soit $\omega = (x_+, x_0, x_-)$ appartenant à $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$ et ψ un élément de $(V_i^* \otimes V_j)_\omega$, on pose

$$\|\psi\|_\omega := \left| \frac{\langle \alpha_j, \psi(u) \rangle \langle \alpha_i, z \rangle}{\langle \alpha_i, u \rangle \langle \alpha_j, z \rangle} \right|,$$

où :

– z est un élément non nul de $\xi^1(x_0)$,
– u un élément non nul de $V_i(x_+, x_-)$,
– et $\alpha_\sharp$ est une forme linéaire de noyau $\xi^{\sharp-1}(x_+) \oplus \xi^{n-\sharp}(x_-)$, pour $\sharp = i, j$.

Il est évident que cette formule ne dépend pas des choix de z, u, α_i, α_j. De plus le fait que

$$\mathbf{R}^n = \xi^1(x_0) \oplus \xi^{j-1}(x_+) \oplus \xi^{n-j}(x_-) = \xi^1(x_0) \oplus \xi^{i-1}(x_+) \oplus \xi^{n-i}(x_-)$$

montre que le dénominateur ne s'annule pas et que $\| \cdot \|_\omega$ définit bien une norme sur $\left(V_i^* \otimes V_j\right)_\omega$. Cette métrique est continue et invariante par l'action de Γ.

Le flot est faiblement contractant :

Soit une suite $(t_q)_{q \in \mathbf{N}}$ tendant vers l'infini, $\omega = (x_+, x_0, x_-)$ dans $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$ et ψ appartenant à $(V_i^* \otimes V_j)_\omega$, montrons que

$$\lim_{q \to +\infty} \|\phi^{t_q} \cdot \psi\|_{\phi^{t_q} \cdot \omega} = 0.$$

Par l'expression du flot, $\phi^{t_q} \cdot \psi$ est égal à ψ. Posons $\omega_q = \phi^{t_q} \cdot \omega = (x_+, x_q, x_-)$, alors $\lim_{q \to +\infty} x_q = x_+$. Soit z_q un vecteur non nul de $\xi^1(x_q)$, alors

$$\frac{\|\psi\|_{\omega_q}}{\|\psi\|_\omega} = \left| \frac{\langle \alpha_i, z_q \rangle}{\langle \alpha_j, z_q \rangle} \frac{\langle \alpha_j, z_0 \rangle}{\langle \alpha_i, z_0 \rangle} \right|,$$

avec α_i, α_j comme plus haut. On peut ainsi choisir z_q dans la somme $\xi^1(x_q) \oplus \xi^{j-1}(x_+)$ sans changer la valeur de l'expression ci-dessus. Comme cette somme $(\xi^1(x_q) \oplus \xi^{j-1}(x_+))_{q \in \mathbf{N}}$ converge vers $\xi^j(x_+)$, on peut supposer que (z_q) converge vers un élément z de $\xi^j(x_+) - \xi^{j-1}(x_+)$, alors

$$\lim_{q \to +\infty} \langle \alpha_j, z_q \rangle = \langle \alpha_j, z \rangle \neq 0,$$
$$\lim_{q \to +\infty} \langle \alpha_i, z_q \rangle = \langle \alpha_i, z \rangle = 0,$$

car z appartient à $\xi^j(x_+) \subset \xi^{i-1}(x_+)$, ce qui prouve

$$\lim_{q \to +\infty} \|\psi\|_{\omega_q} = 0.$$

Le flot est contactant :

Il faut donc encore prouver une condition d'uniformité. Comme $\mathrm{S}\Sigma$ est compact, il suffit de trouver $t_0 \geq 0$ pour lequel

> pour tout $t \geq t_0$, tout ω dans $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$ et pour tout ψ dans $(V_i^* \otimes V_j)_\omega$,
>
> $$\|\phi^t \cdot \psi\|_{\phi^t \cdot \omega} \leq \frac{1}{2} \|\psi\|_\omega.$$

Par l'absurde, supposons qu'il existe une suite $(t_q)_{q \in \mathbf{N}}$, tendant vers $+\infty$ et des suites $(\omega_q)_{q \in \mathbf{N}}$ et $(\psi_q)_{q \in \mathbf{N}}$ telles que

$$\|\phi^{t_q} \cdot \psi_q\|_{\phi^{t_q} \cdot \omega_q} > \frac{1}{2} \|\psi_q\|_{\omega_q}.$$

Par Γ-invariance et compacité de $\mathrm{S}\Sigma$, on peut supposer que la suite $\omega_q = (x_{+,q}, x_{0,q}, x_{-,q})$ converge vers un point $\omega = (x_+, x_0, x_-)$ de $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$. Si on pose

$$\omega'_q := \phi^{t_q} \cdot \omega_q = (x_{+,q}, x'_{0,q}, x_{-,q}),$$

alors

$$\lim_{q\to\infty} x'_{0,q} = x_+.$$

Il existe, pour $\sharp = i, j$, des formes $\alpha_{\sharp,q}$ de noyau $\xi^{\sharp-1}(x_{+,q}) \oplus \xi^{n-\sharp}(x_{-,q})$ convergeant vers $\alpha_\sharp$ de noyau $\xi^{\sharp-1}(x_+) \oplus \xi^{n-\sharp}(x_-)$.

Fixons aussi une suite (z_q) d'éléments de $\xi^1(x_{0,q})$ convergeant vers un élément non nul z de $\xi^1(x_0)$. Pour tout q

$$\frac{\|\psi_q\|_{\omega'_q}}{\|\psi_q\|_{\omega_q}} = \Big|\frac{\langle \alpha_{i,q}, z'_q\rangle}{\langle \alpha_{j,q}, z'_q\rangle}\frac{\langle \alpha_{j,q}, z_q\rangle}{\langle \alpha_{i,q}, z_q\rangle}\Big| > \frac{1}{2},$$

où z'_q est un élément non nul de $\xi^1(x'_{0,q})$ et cette formule vaut encore si z'_q appartient à $\xi^1(x'_{0,q}) \oplus \xi^{j-1}(x_{+,q})$. Ce qui nous permet de supposer que la suite (z'_q) converge vers un élément z' appartenant à $\xi^j(x_+) - \xi^{j-1}(x_+)$, alors

$$\lim_{q\to+\infty} \frac{\|\psi_q\|_{\omega'_q}}{\|\psi_q\|_{\omega_q}} = \Big|\frac{\langle \alpha_i, z'\rangle}{\langle \alpha_j, z'\rangle}\frac{\langle \alpha_j, z\rangle}{\langle \alpha_i, z\rangle}\Big| = 0,$$

ce qui est une contradiction. *q.e.d.*

4. Représentations d'Anosov et 3-hyperconvexes

Dans cette partie, nous énonçons quelques propriétés dont jouissent les représentations qui sont à la fois d'Anosov et 3-hyperconvexes, notamment une propriété de continuité de la courbe limite qui sera utile pour démontrer l'ouverture des représentations hyperconvexes dans la partie suivante.

4.1. **Représentation 3-hyperconvexe.**
A nouveau, on commence par la définition relative aux courbes.

Définition 19. *Soit $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{n-1})$ une courbe continue dans la variété des drapeaux $\mathcal{F}(\mathbf{R}^n)$ définie sur I, un intervalle ou le cercle. On dit que ξ est* 3-hyperconvexe *si :*

la somme suivante est directe

$$\mathbf{R}^n = \xi^j(x) \oplus \xi^k(y) \oplus \xi^l(z),$$

dès que $n = j + k + l$ et x, y, z sont trois points de I deux à deux distincts.

En particulier la courbe est 2-hyperconvexe.

Une représentation ρ de Γ dans $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$ est dite 3-hyperconvexe *s'il existe une courbe ξ, de $\partial\Gamma$ dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}^n)$, ρ-équivariante et 3-hyperconvexe.*

Une représentation hyperconvexe est de manière évidente 3-hyperconvexe.

4.2. **Ouverture des représentations d'Anosov et 3-hyperconvexes.**

Proposition 20. *L'ensemble des représentations à la fois d'Anosov et 3-hyperconvexes est ouvert dans* $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$.

Démonstration :
Soit ρ une représentation d'Anosov et 3-hyperconvexe. D'après le théorème 12, il existe un voisinage U de ρ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$, dont les éléments sont des représentations d'Anosov et, si $\xi_{\rho'} = \left(\xi^1_{\rho'}, \dots, \xi^{n-1}_{\rho'}\right)$ est la courbe associée à ρ', alors l'application

$$\begin{aligned} U \times \partial\Gamma &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{R}^n) \\ (\rho', x) &\longmapsto \xi_{\rho'}(x) \end{aligned}$$

est continue. Considérons, si $j + k + l = n$, la fonction

$$\begin{aligned} U \times \mathrm{S}\widetilde{\Sigma} &\longrightarrow \mathbf{N} \\ (\rho', (x_+, x_0, x_-)) &\longmapsto \dim\left(\xi^j_{\rho'}(x_+) + \xi^k_{\rho'}(x_0) + \xi^l_{\rho'}(x_-)\right). \end{aligned}$$

Ces fonctions sont Γ-invariantes, semi-continues inférieurement et leur restrictions à $\{\rho\} \times \mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$ sont constantes égales à n. On en déduit que, quitte à restreindre U, chacune de ces fonctions est constante égale à n, c'est-à-dire que toutes les sommes de trois espaces sont directes, ce qui est bien la condition de 3-hyperconvexité. *q.e.d.*

4.3. **Propriétés de la courbe limite.** Les courbes limites des représentations d'Anosov et 3-hyperconvexes satisfont des conditions de continuité supplémentaires, à savoir que les sommes de *deux* espaces convergent.

Proposition 21. *Soit* ξ *de* $\partial\Gamma$ *dans* $\mathcal{F}(\mathbf{R}^n)$ *la courbe associée à une représentation* ρ *d'Anosov et* 3*-hyperconvexe.*
Pour tout $m = k + l \leq n$ *et pour tout* x *dans* $\partial\Gamma$,

$$\lim_{(y \neq z) \to x} \xi^k(y) \oplus \xi^l(z) = \xi^m(x).$$

Dans l'article [12], cette continuité est démontrée sous l'hypothèse que la représentation vérifie une hypothèse supplémentaire (propriété (H), *op.cit.* partie 7).

Démonstration : Autrement dit, il faut démontrer que la fonction

$$\begin{aligned} \partial\Gamma \times \partial\Gamma &\longrightarrow \mathrm{Gr}^m(\mathbf{R}^n) \\ (y, z) &\longmapsto \begin{cases} \xi^k(y) \oplus \xi^l(z) & \text{si } y \neq z \\ \xi^m(y) & \text{si } y = z \end{cases} \end{aligned}$$

est continue. Les seuls problèmes de continuité sont aux points de la forme (x, x).

Soit donc x un point de $\partial\Gamma$ et I un voisinage de x homéomorphe à un segment. L'orientation de $\partial\Gamma$ permet d'orienter I. Nous allons montrer que la restriction suivante

$$\begin{aligned} \{(y,z) \in I^2 \mid y \geq z\} &\longrightarrow \mathrm{Gr}^m(\mathbf{R}^n) \\ (y,z) &\longmapsto \begin{cases} \xi^k(y) \oplus \xi^l(z) & \text{si } y > z \\ \xi^m(y) & \text{si } y = z \end{cases} \end{aligned}$$

est continue, de même la restriction à l'ensemble $\{(y,z) \in I^2 \mid y \leq z\}$ est continue, ce qui montre la continuité cherchée au voisinage de (x,x).

Nous montrons ce résultat par récurrence sur l en détaillant d'abord le cas $l = 1$. *q.e.d.*

Démonstration du premier cas, $l = 1$: Soit donc $I \subset \partial\Gamma$ un segment, on veut montrer que, pour tout $k < n$, l'application

$$\begin{aligned} \eta^k : \{(y,z) \in I^2 \mid y \geq z\} &\longrightarrow \mathrm{Gr}^k(\mathbf{R}^n) \\ (y,z) &\longmapsto \begin{cases} \xi^{k-1}(y) \oplus \xi^1(z) & \text{si } y > z \\ \xi^k(y) & \text{si } y = z \end{cases} \end{aligned}$$

est continue.

Soit x_- un point de $\partial\Gamma$ n'appartenant pas à I. Nous allons d'abord montrer que l'application

$$\begin{aligned} \zeta^{n-1} : \{(y,z) \in I^2 \mid y \geq z\} &\longrightarrow \mathrm{Gr}^{n-1}(\mathbf{R}^n) \\ (y,z) &\longmapsto \eta^k(y,z) \oplus \xi^{n-k-1}(x_-) \end{aligned}$$

est continue, puis en remarquant que $\eta^k = \zeta^{n-1} \cap \eta^{k+1}$, on conclut par récurrence descendante sur k. *q.e.d.*

4.3.1. *Continuité « faible » de ζ^{n-1}.* Nous allons prouver la propriété plus faible suivante :

pour tout x_+ dans I,

$$\lim_{\substack{x \to x_+ \\ <}} \zeta^{n-1}(x_+, x) = \zeta^{n-1}(x_+, x_+).$$

Pour ce faire, nous allons utiliser les métriques introduites dans la démonstration de la proposition 18. Rappelons d'abord leur définition.

Soit $\omega = (x_+, x_0, x_-)$ dans $\partial\Gamma^{3+} = \mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$, la norme $\|\cdot\|_\omega$ sur $(V_i^* \otimes V_j)_\omega$ est donnée par la formule :

pour ψ dans $(V_i^* \otimes V_j)_\omega = V_i(x_+, x_-)^* \otimes V_j(x_+, x_-)$,

$$\|\psi\|_\omega := \left| \frac{\langle \alpha_j, \psi(u) \rangle \langle \alpha_i, z \rangle}{\langle \alpha_i, u \rangle \langle \alpha_j, z \rangle} \right|,$$

$$\text{avec } \begin{cases} \alpha_i \text{ de noyau } \xi^{i-1}(x_+) \oplus \xi^{n-i}(x_-), \\ \alpha_j \text{ de noyau } \xi^{j-1}(x_+) \oplus \xi^{n-j}(x_-), \\ u \in V_i(x_+, x_-), \\ z \in \xi^1(x_0). \end{cases}$$

Soit maintenant une suite $(x_q)_{q \in \mathbf{N}}$ convergeant vers x_+, avec $x_+ > x_q$. Si on fixe un élément ψ de $V_i(x_+, x_-)^* \otimes V_j(x_+, x_-)$, ψ définit alors un élément

ψ_q de $(V_i^* \otimes V_j)_{\omega_q}$ pour tout q, en posant $\omega_q := (x_+, x_q, x_-)$. On a alors, par la contraction du flot,

$$\|\psi_q\|_{\omega_q} \xrightarrow{q \to +\infty} 0,$$

donc

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } Q \text{ tel que, si } q \geq Q, \quad \|\psi_q\|_{\omega_q} \leq \varepsilon.$$

En utilisant la formule de la norme $\|\cdot\|_\omega$:

pour tout z_q dans $\xi^1(x_q)$,

$$|\langle \alpha_i, z_q \rangle| \leq \left| \frac{\langle \alpha_j, \psi(u) \rangle}{\langle \alpha_i, u \rangle} \right| |\langle \alpha_j, z_q \rangle| \varepsilon = m |\langle \alpha_j, z_q \rangle| \varepsilon,$$

avec $m = |\langle \alpha_j, \psi(u) \rangle / \langle \alpha_i, u \rangle|$. Cette inégalité vaut encore quand z_q appartient à $\xi^1(x_q) \oplus \xi^{j-1}(x_+) \oplus \xi^{n-i}(x_-)$.

On en déduit, si K est la norme (d'opérateur) de α_j,

pour tout z_q dans $\xi^1(x_q) \oplus \xi^{j-1}(x_+) \oplus \xi^{n-i}(x_-)$,

$$|\langle \alpha_i, z_q \rangle| \leq m |\langle \alpha_j, z_q \rangle| \varepsilon \leq mK \|z\| \varepsilon.$$

Ce qui signifie que z_q est proche du noyau de α_i, *i.e.*

pour tout z_q dans $\xi^1(x_q) \oplus \xi^{j-1}(x_+) \oplus \xi^{n-i}(x_-)$,

$$\mathrm{d}(z_q, \xi^{i-1}(x_+) \oplus \xi^{n-i}(x_-)) \leq m \frac{K}{\kappa} \|z\| \varepsilon.$$

Ici κ est la norme de α_i.

En particulier, si $(i,j) = (k+1, k)$, on obtient l'énoncé suivant :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe Q tel que si $q \geq Q$,

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Gr}^{n-1}(\mathbf{R}^n)}(\xi^{k-1}(x_+) \oplus \xi^1(x_q) \oplus \xi^{n-k-1}(x_-), \xi^k(x_+) \oplus \xi^{n-k-1}(x_-)) \leq \varepsilon.$$

Ce qu'on cherchait.

4.3.2. *Continuité de ζ^{n-1}.* On reprend la métrique $\|\cdot\|_\omega$ définie au paragraphe précédent et on va tacher de rendre l'argument utilisé « uniforme ». Cette métrique est continue et Γ-invariante sur le fibré $V_i^* \otimes V_j$. En outre, par l'hypothèse d'Anosov, si $i > j$, il existe des constantes A et a telles que, pour tout $t \geq 0$, pour tout $\omega \in \mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$, ψ dans $(V_i^* \otimes V_j)_\omega$,

$$\|\phi^t \cdot \psi\|_{\phi^t \cdot \omega} \leq A e^{-at} \|\psi\|_\omega.$$

Utilisation de la contraction. Traduisons d'abord ce résultat sur l'intervalle I.

Fixons x_0 n'appartenant pas à I et tel que, pour tout x_+ dans I, le triplet (x_+, x_0, x_-) est un triplet orienté (x_- a été fixé plus haut dans la définition de ζ).

Soient alors ψ, u, α_i et α_j des fonctions continues sur I telles que, pour tout x_+ dans I :

– $\psi(x_+)$ est un élément non nul de $V_i(x_+, x_-)^* \otimes V_j(x_+, x_-)$.

– $u(x_+)$ est un élément non nul de $V_i(x_+, x_-)$.
– $\alpha_i(x_+)$ est une forme linéaire de noyau $\xi^{i-1}(x_+) \oplus \xi^{n-i}(x_-)$.
– $\alpha_j(x_+)$ est une forme linéaire de noyau $\xi^{j-1}(x_+) \oplus \xi^{n-j}(x_-)$.

Il existe alors des réels strictement positifs M et m tels que

$$\text{pour tout } x_+ \in I, \quad \begin{cases} \|\psi(x_+)\|_{(x_+,x_0,x_-)} \leq M \\ \text{et } \left|\dfrac{\langle \alpha_j(x_+), \psi(x_+) \cdot u(x_+)\rangle}{\langle \alpha_i(x_+), u(x_+)\rangle}\right| \geq m. \end{cases}$$

Ceci implique, en utilisant la formule pour $\|\cdot\|_\omega$:

pour tout x_+ dans I, $t \geq 0$, en posant $\phi^t \cdot (x_+, x_0, x_-) = (x_+, x, x_-)$

$$\text{pour tout } z \text{ dans } \xi^1(x) - \{0\},$$
$$\big|\langle \alpha_i(x_+), z\rangle\big| \leq \big|\langle \alpha_j(x_+), z\rangle\big| \frac{M}{m} A e^{-at},$$

mais cette inégalité vaut encore si z appartient à $\xi^{j-1}(x_+) \oplus \xi^1(x) \oplus \xi^{n-i}(x_-)$.

De plus, par continuité de α_j, il existe une constante K majorant uniforme de la norme de α_j. On obtient alors, pour tout $z \in \xi^{j-1}(x_+) \oplus \xi^1(x) \oplus \xi^{n-i}(x_-)$,

$$\big|\langle \alpha_i(x_+), z\rangle\big| \leq K \frac{M}{m} A e^{-at} \|z\|.$$

Ce qui signifie encore que z est proche du noyau de α_i.

Conséquence sur les hyperplans. En particulier en prenant $(i, j) = (k+1, k)$, ceci donne :

pour tout $x_+ \in I$ et $t \geq 0$, en posant $(x_+, x, x_-) = \phi^t \cdot (x_+, x_0, x_-)$, on a

quelque soit z dans $\xi^{k-1}(x_+) \oplus \xi^1(x) \oplus \xi^{n-k-1}(x_-)$,

$$\big|\langle \alpha_{k+1}(x_+), z\rangle\big| \leq \frac{M}{m} A e^{-at} K \|z\|.$$

Comme le noyau de α_{k+1} est $\xi^k(x_+) \oplus \xi^{n-k-1}(x_-)$, ceci implique que, pour tout z dans $\xi^{k-1}(x_+) \oplus \xi^1(x) \oplus \xi^{n-k-1}(x_-)$

$$\mathrm{d}\big(z, \xi^k(x_+) \oplus \xi^{n-k-1}(x_-)\big) \leq \frac{M}{m} A e^{-at} \frac{K}{\kappa} \|z\|,$$

pour une constante κ, qui est un minorant uniforme de la norme de α_{k+1}. Autrement dit

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Gr}^{n-1}(\mathbf{R}^n)}\big(\zeta^{n-1}(x_+, x), \zeta^{n-1}(x_+, x_+)\big) \leq C e^{-at}$$

avec $C = \frac{K}{\kappa} \frac{M}{m} A$.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 22. *si (y_+, x_0, x_-) appartient à $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$ et $t_0 \geq 0$ est fixé, alors il existe un voisinage U de y_+ dans $\partial\Gamma$ et un réel $\delta > 0$ tels que*

pour tout triplet orienté (x_+, x, x_-) avec x_+ dans U et $\mathrm{d}_{\partial\Gamma}(x_+, x) \leq \delta$,

si t est défini par

$$(x_+, x, x_-) = \phi^t \cdot (x_+, x_0, x_-),$$

alors t est plus grand *que t_0.*

Démonstration : En utilisant les identifications de la partie 1.7 du bord $\partial\Gamma$ avec $\mathbb{P}^1(\mathbf{R})$ et de $\widetilde{\Sigma}$ avec $\mathbb{H}$, on se ramène à un calcul élémentaire sur la droite projective. *q.e.d.*

Conclusion. Soit donc $t_0 \geq 0$ tel que $Ce^{-at_0} \leq \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est donné. D'après le lemme ci-dessus, si y_+ appartient à I, il existe alors un voisinage U de y_+ et $\delta > 0$ tels que

si $x_+ > x$ vérifient $x_+ \in U$ et $\mathrm{d}_{\partial\Gamma}(x_+, x) \leq \delta$, alors

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Gr}^{n-1}(\mathbf{R}^n)}\big(\zeta^{n-1}(x_+, x), \zeta^{n-1}(x_+, x_+)\big) \leq \varepsilon.$$

Par continuité de ξ^k, on peut restreindre U et supposer que pour tout x_+ dans U

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Gr}^{n-1}(\mathbf{R}^n)}\big(\zeta^{n-1}(x_+, x_+), \zeta^{n-1}(y_+, y_+)\big) \leq \varepsilon.$$

Soit

$$\mathcal{U} := \{(x_+, x) \text{ tel que } x_+ \in U,\, x_+ \geq x,\, \mathrm{d}_{\partial\Gamma}(x_+, x) \leq \delta\}.$$

L'ensemble $\mathcal{U}$ est un voisinage de (y_+, y_+) dans l'ensemble $\{(x_+, x) \in I^2 \mid x_+ \geq x\}$. Si (x_+, x) appartient à $\mathcal{U}$,

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Gr}^{n-1}(\mathbf{R}^n)}(\zeta^{n-1}(x_+, x), \zeta^{n-1}(y_+, y_+)) \leq 2\varepsilon,$$

d'où la continuité cherchée.

Démonstration du cas $l > 1$: Nous raisonnons par récurrence sur l, *i.e.* on suppose que pour tout k et pour tout x dans $\partial\Gamma$

$$\lim_{(y \neq z) \to x} \xi^k(y) \oplus \xi^{l-1}(z) = \xi^{k+l-1}(x).$$

Ici, il faut montrer que, si I est un segment inclus dans $\partial\Gamma$ et si $k + l < n$, alors l'application

$$\begin{aligned} \eta^{k+l} : \{(y, z) \in I^2 \mid y \geq z\} &\longrightarrow \mathrm{Gr}^{k+l}(\mathbf{R}^n) \\ (y, z) &\longmapsto \begin{cases} \xi^k(y) \oplus \xi^l(z) & \text{si } y > z \\ \xi^{k+l}(y) & \text{si } y = z \end{cases} \end{aligned}$$

est continue.

Fixons x_- un point de $\partial\Gamma$ n'appartenant pas à I. De la même manière que dans le cas $l = 1$, on va montrer que l'application

$$\zeta^{n-1} := \eta^{k+l} \oplus \xi^{n-k-l-1}(x_-)$$

est continue et l'égalité $\eta^{k+l} = \eta^{(k+1)+l} \cap \zeta^{n-1}$ permettra de conclure par récurrence descendante sur k. *q.e.d.*

4.3.3. *Continuité de ζ^{n-1}.* Il s'agit encore d'utiliser une métrique bien adaptée sur le fibré $V_i^* \otimes V_j$.

Définition des métriques. Soient $n-l+1 \geq i > j$, $\omega = (x_+, x_0, x_-)$ dans $\mathrm{S}\widetilde{\Sigma}$ et ψ dans la fibre $(V_i^* \otimes V_j)_\omega$. On pose, avec $r = n-l+1$,

$$\|\psi\|_\omega := \Big| \frac{\langle \alpha_j, \psi(u) \rangle}{\langle \alpha_i, u \rangle} \frac{\langle \alpha_i, z \rangle}{\langle \alpha_j, z \rangle} \Big|,$$

$$\text{ici } \begin{cases} u \in V_i(x_+, x_-), \\ z \in \xi^l(x_0) - \xi^{l-1}(x_0), \\ \alpha_i \text{ de noyau } \xi^{i-1}(x_+) \oplus \xi^{l-1}(x_0) \oplus \xi^{r-i}(x_-), \\ \alpha_j \text{ de noyau } \xi^{j-1}(x_+) \oplus \xi^{l-1}(x_0) \oplus \xi^{r-j}(x_-). \end{cases}$$

On vérifie que cette formule définit bien une métrique continue Γ-invariante.

Utilisation de la contraction. On fixe aussi un point x_0 n'appartenant pas à I et tel que, pour tout x_+ dans I, le triplet (x_+, x_0, x_-) est orienté.

Par hypothèse de récurrence sur l, pour $\sharp = i, j$, les fonctions suivantes sont continues

$$\{(x_+, x) \in I^2 \mid x_+ \geq x\} \longrightarrow \mathrm{Gr}^{n-1}(\mathbf{R}^n)$$

$$(x_+, x) \longmapsto \begin{cases} \xi^{\sharp-1}(x_+) \oplus \xi^{l-1}(x) \oplus \xi^{r-\sharp}(x_-) & \text{si } x_+ > x \\ \xi^{\sharp+l-2}(x_+) \oplus \xi^{r-\sharp}(x_-) & \text{si } x_+ = x \end{cases}$$

Il existe donc des fonctions continues $\alpha_\sharp$ définies sur $\{(x_+, x) \in I^2 \mid x_+ \geq x\}$ à valeurs dans $(\mathbf{R}^n)^*$ et dont les noyaux sont les fonctions ci-dessus.

Les mêmes calculs que dans le cas précédent ($l = 1$) montrent que, pour tous $x_+ > x$ dans I et t vérifiant $(x_+, x, x_-) = \phi^t \cdot (x_+, x_0, x_-)$:

pour tout z dans $\xi^l(x) - \xi^{l-1}(x)$,

$$\big|\langle \alpha_i(x_+, x), z \rangle\big| \leq \mathcal{K} e^{-at} \big|\langle \alpha_j(x_+, x), z \rangle\big|,$$

pour des constantes $\mathcal{K}$ et a indépendantes de x_+ et x. On remarque encore que cette inégalité reste encore vraie quand z appartient à la somme $\xi^{j-1}(x_+) \oplus \xi^l(x) \oplus \xi^{r-i}(x_-)$.

Soit K un majorant uniforme de la norme de α_j. Ceci donne, pour tous $x_+ > x$ dans I, si t est donné par $(x_+, x, x_-) = \phi^t \cdot (x_+, x_0, x_-)$, alors

pour tout z dans $\xi^{j-1}(x_+) \oplus \xi^l(x) \oplus \xi^{r-i}(x_-)$,

$$\big|\langle \alpha_i(x_+, x), z \rangle\big| \leq \mathcal{K} K e^{-at} \|z\|.$$

Conclusion. En particulier, en appliquant ceci au couple $(i, j) = (k+2, k+1)$ et en utilisant le fait que α_{k+2} est uniformément minorée, on trouve, comme $\ker \alpha_{k+2} = \xi^{k+1}(x_+) \oplus \xi^{l-1}(x) \oplus \xi^m(x_-)$,

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Gr}^{n-1}(\mathbf{R}^n)}\big(\zeta^{n-1}(x_+, x_-), \xi^{k+1}(x_+) \oplus \xi^{l-1}(x) \oplus \xi^m(x_-)\big) \leq C e^{-at}$$

($m = n - k - l - 1$) pour une constante C, ceci valant pour tous $x_+ > x$ appartenant à I et t tel que $(x_+, x, x_-) = \phi^t \cdot (x_+, x_0, x_-)$.

On conclut ensuite de la même manière que dans le paragraphe précédent, en utilisant une dernière fois l'hypothèse de récurrence au rang $l - 1$.

5. Ouverture des représentations hyperconvexes

Comme l'indique le titre de cette partie nous prouvons le théorème suivant :

Théorème 23. *Les représentations hyperconvexes forment un ouvert de* $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$.

Dans [12], F. Labourie montre l'ouverture des représentations hyperconvexes qui vérifient la propriété supplémentaire (H).

On ne sait pas si une représentation qui est à la fois d'Anosov et 3-hyperconvexe est aussi hyperconvexe ce qui impliquerait tout de suite le théorème précédent grâce à la proposition 20. La principale obstruction à répliquer les récurrences qui suivent pour une représentation d'Anosov et 3-hyperconvexe est le manque de connaissances des orientations sur la courbe limite d'une telle représentation ; le lemme 25 énoncé plus loin pour une représentation hyperconvexe n'est pas connu pour une représentation d'Anosov et 3-hyperconvexe et ceci empêche un raisonnement direct. Ici cette difficulté sera contournée grâce à un argument d'homotopie.

5.1. **Propositions préliminaires.**

Nous utiliserons à plusieurs reprises la proposition suivante :

Proposition 24. *Soit* ρ *une représentation* 2*-hyperconvexe du groupe* Γ *dans* $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$ *et* ξ *la courbe associée.*

(1) *Soit* $m_1 + \cdots + m_k + m_{k+1} = n$ *tels que pour tout* x *dans le bord* $\partial\Gamma$

$$(\star) \qquad \lim_{(x_i)\to x} \bigoplus_{i=1}^{k} \xi^{m_i}(x_i) = \xi^{n-m_{k+1}}(x),$$

la limite étant prise sur les k*-uplets* $(x_1, \dots, x_k)$ *de points deux à deux distincts.*

Alors pour tous $x_1, \dots, x_{k+1}$ *deux à deux distincts,*

$$\mathbf{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{k+1} \xi^{m_i}(x_i).$$

(2) *Pour* $k \geq 3$*, si* $(\star)$ *vaut quand on prend les limites sur les* k*-uplets* $(x_1, \dots, x_k)$ *orientés (voir la définition dans le paragraphe 1.7), on a dans ce cas*

$$\text{pour tout } (k+1)\text{-uplet orienté } (x_1, \dots, x_{k+1}), \qquad \mathbf{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{k+1} \xi^{m_i}(x_i).$$

Démonstration :
(1) soient $x_1, \dots, x_{k+1}$, des points deux à deux distincts du bord $\partial\Gamma$. Dans ce cas on sait qu'il existe deux points x_+ et x_- de $\partial\Gamma$ et une suite $(\gamma_q)_{q\in\mathbf{N}}$

de Γ tels que

$$\text{pour } i = 1, \ldots, k, \lim \gamma_q \cdot x_i = x_-$$
$$\text{et } \lim \gamma_q \cdot x_{k+1} = x_+.$$

Ensuite de la continuité supposée, de la Γ-invariance de ξ et du fait que $\xi^{n-m_{k+1}}(x_-) \oplus \xi^{m_{k+1}}(x_+) = \mathbf{R}^n$, on déduit le résultat voulu.

(2) Notons Γ^+ le sous-groupe de Γ des éléments conservant l'orientation du bord $\partial\Gamma$. Si $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ est un $(k+1)$-uplet orienté, on sait qu'on peut choisir la suite (γ_q) dans Γ^+, ce qui permet de conclure. *q.e.d.*

Nous utiliserons aussi ce lemme sur les orientations des courbes Frenet :

Lemme 25. *Soit $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{n-1})$ une courbe Frenet définie sur un* in*tervalle I. Supposons que, pour tout i, la courbe ξ^i se relève en une courbe orientée continue ξ^i_+ de I dans $\mathrm{Gr}^i_+(\mathbf{R}^n)$ et que*
pour tout $x \in I$,

$$\lim_{(y>z)\to x} \xi^{i-1}_+(y) \oplus \xi^1_+(z) = \xi^i_+(x).$$

Il existe alors une orientation $\mathbf{R}^n_+$ sur $\mathbf{R}^n$ telle que, pour tous $n_1 + \cdots + n_k = n$ et pour tous $x_1 > \cdots > x_k$

$$\mathbf{R}^n_+ = \xi^{n_1}_+(x_1) \oplus \cdots \oplus \xi^{n_k}_+(x_k).$$

L'orientation sur ξ^1 impose l'orientation sur les autres espaces par la condition de limites.

Démonstration : On remarque que l'orientation sur $\mathbf{R}^n$ définie par

$$\xi^1_+(x_1) \oplus \cdots \oplus \xi^1_+(x_n),$$

si $x_1 > \cdots > x_n$, ne dépend pas de $(x_1, \ldots, x_n)$ et que les égalités voulues sont immédiates par continuité. *q.e.d.*

5.2. **Démonstration du théorème 23.** Soit donc ρ_0 une représentation hyperconvexe. La représentation ρ_0 est alors évidement 3-hyperconvexe et est d'Anosov d'après la proposition 18. D'après l'ouverture des représentations d'Anosov et 3-hyperconvexes (proposition 20), il existe un voisinage U de ρ_0 dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$ composé de représentations d'Anosov et 3-hyperconvexes. En outre on sait aussi que la courbe associée varie continûment, c'est-à-dire en notant ξ_ρ la courbe invariante par ρ, l'application suivante

$$U \times \partial\Gamma \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{R}^n)$$
$$(\rho, x) \longmapsto \xi_\rho(x)$$

est continue.

De plus, comme la variété des représentations $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$ est une variété algébrique réelle, on peut supposer que le voisinage U est contractile. Ceci est par exemple conséquence du fait qu'une variété algébrique réelle est triangulable ([2] théorème 9.2.1).

Fixons nous pour la suite de cette partie une représentation ρ dans U et soit ξ la courbe invariante associée à ρ de $\partial\Gamma$ dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}^n)$. Nous devons montrer que ξ est une courbe Frenet. Par récurrence sur l'entier k, nous montrerons

$$\mathrm{H}(k)\left\{\begin{array}{l}\text{pour tous } m_1+\cdots+m_k=m\leq n, \text{ et } x\in\partial\Gamma\\ \displaystyle\lim_{(x_i)\to x}\bigoplus_{i=1}^{k}\xi^{m_i}(x_i)=\xi^m(x)\end{array}\right.$$

Les limites étant prises sur les k-uplets de points deux à deux distincts.

L'hypothèse H(1) est la continuité de ξ et H(2) est conséquence de la proposition 21 car ρ est d'Anosov et 3-hyperconvexe. Si $k\geq 2$, nous montrons dans le paragraphe suivant comment $\mathrm{H}(k)$ implique $\mathrm{H}(k+1)$.

Nous utiliserons aussi qu'il existe une famille continue $(\xi_t)_{t\in[0,1]}$ de courbes 3-hyperconvexes, avec $\xi_0=\xi_{\rho_0}$ et $\xi_1=\xi_\rho$. Ce dernier fait est une conséquence de la contractilité de U et sera utile pour démontrer que certaines orientations coïncident.

5.3. **Démonstration de** $\mathrm{H}(k)\Rightarrow\mathrm{H}(k+1)$**.** On cherche donc à montrer la propriété de continuité au rang $k+1$, ce qui va se faire par récurrence sur l'entier m_k

$$\mathrm{P}_k(m_k)\left\{\begin{array}{l}\text{pour tous } m_1+\cdots+m_{k-1}+m_{k+1}=m-m_k\leq n-m_k,\\ \text{et pour tout } x \text{ dans } \partial\Gamma,\\ \displaystyle\lim_{(x_i)\to x}\bigoplus_{i}\xi^{m_i}(x_i)=\xi^m(x).\end{array}\right.$$

Les limites étant prises, cette fois-ci, sur les $(k+1)$-uplets vérifiant $x_1>\cdots>x_{k+1}$.

Le fait que les sommes écrites dans $\mathrm{P}_k(m_k)$ sont directes est une conséquence de $\mathrm{H}(k)$ et de la proposition 24. De plus il n'y a pas de différence entre $\mathrm{P}_k(0)$ et $\mathrm{H}(k)$, il suffit donc de montrer que $\mathrm{P}_k(m_k)$ implique $\mathrm{P}_k(m_k+1)$.

Nous commencerons par prouver $\mathrm{P}_k(1)$ pour fixer les idées. L'idée principale est de démontrer un changement d'orientations qui impliquera une inclusion (voir le lemme 7.13 dans [12]).

5.3.1. *Un cas particulier.* Traitons le premier cas non trivial, qui met déjà en évidence les principales étapes de la démonstration en évitant les complications de notations.

Démontrons d'abord que, pour tout x de $\partial\Gamma$

$$\lim_{(x_i)\to x}\xi^{n-3}(x_1)\oplus\xi^1(x_2)\oplus\xi^1(x_3)=\xi^{n-1}(x).$$

La limite étant prise sur les triplets $x_1>x_2>x_3$.

Fixons nous un intervalle I inclus dans le bord $\partial\Gamma$ et une orientation continue ξ^1_+ sur ξ^1. On oriente alors ξ^k et $\mathbf{R}^n$ par les égalités

$$(\bigstar)\quad \xi^{k+1}_+(x)=\lim_{(y>z)\to x}\xi^k_+(y)\oplus\xi^1_+(z),\quad \mathbf{R}^n_+=\xi^{n-1}_+(y)\oplus\xi^1_+(z) \text{ si } y>z.$$

Soient alors trois suites $(x_{1,q})$, $(x_{2,q})$ et $(x_{3,q})$ tendant vers un point x de I et telles que, pour tout q, $x_{1,q} > x_{2,q} > x_{3,q}$. On suppose aussi la convergence, parmi les hyperplans orientés, de la suite

$$P^{n-1}_{q,+} := \xi^{n-3}_+(x_{1,q}) \oplus \xi^1_+(x_{2,q}) \oplus \xi^1_+(x_{3,q})$$

et l'on note P^{n-1}_+ sa limite,

$$P^{n-1}_+ = \lim_{q\to+\infty} P^{n-1}_{q,+}.$$

Par H(2), l'hyperplan P^{n-1} contient $\xi^{n-2}(x)$. Soit w un point de I, avec $x > w$, l'espace orienté

$$Z^1_{q,+} := P^{n-1}_{q,+} \cap \xi^2_+(w)$$

est une droite par la 3-hyperconvexité de ξ et converge vers la droite orientée

$$Z^1_+ = P^{n-1}_+ \cap \xi^2_+(w).$$

Le résultat que l'on veut obtenir est donc l'égalité

$$Z^1 = \xi^{n-1}(x) \cap \xi^2(w).$$

On définit les espaces orientés suivants

$$D^{n-1}_{q,+} := \xi^{n-2}_+(x_{1,q}) \oplus \xi^1_+(x_{3,q}) \xrightarrow{q\to+\infty} \xi^{n-1}_+(x),$$
$$E^{n-1}_{q,+} := \xi^{n-3}_+(x_{1,q}) \oplus \xi^2_+(x_{3,q}) \xrightarrow{q\to+\infty} \xi^{n-1}_+(x).$$

Il faut justifier cette dernière limite, la première étant vraie par définition de l'orientation sur ξ^{n-1}. Par H(2), la limite de E^{n-1}_q dans la grassmanienne $\mathrm{Gr}^{n-1}(\mathbf{R}^n)$ est $\xi^{n-1}(x)$. Pour montrer que cette limite vaut dans $\mathrm{Gr}^{n-1}_+(\mathbf{R}^n)$, *i.e.* que les orientations coïncident, il suffit de prouver que

$$E^{n-1}_{q,+} \oplus \xi^1_+(w) = \xi^{n-1}_+(x) \oplus \xi^1_+(w) = \mathbf{R}^n_+.$$

Si $y_1 > y_2 > y_3$ appartiennent à I, l'orientation

$$(\triangle) \qquad \xi^{n-3}_+(y_1) \oplus \xi^2_+(y_2) \oplus \xi^1_+(y_3)$$

ne dépend pas de (y_1, y_2, y_3). Prolongeons l'orientation sur $\xi^1 = \xi^1_1$ pour définir une orientation continue $(\xi^1_{t,+})_{t\in[0,1]}$ sur $I \times [0,1]$, où $(\xi_t)_{t\in[0,1]}$ est l'homotopie, dans les courbes 3-hyperconvexes, entre ξ et la courbe Frenet ξ_0. Par ($\bigstar$), $(\xi^k_t)_{t\in[0,1]}$ est orienté. L'orientation

$$\xi^{n-3}_{t,+}(y_1) \oplus \xi^2_{t,+}(y_2) \oplus \xi^1_{t,+}(y_3)$$

ne dépend pas non plus de t. Pour $t = 0$, le lemme 25 sur les orientations des courbes Frenet donne que cette orientation est $\mathbf{R}^n_+$, ce qui finit la justification de $\lim E^{n-1}_{q,+} = \xi^{n-1}_+(x)$.

La 3-hyperconvexité implique que Z^1_q et D^{n-1}_q sont en somme directe et, de même, Z^1_q et E^{n-1}_q. Si l'on montre que les orientations sur $\mathbf{R}^n$

$$Z^1_{q,+} \oplus D^{n-1}_{q,+} \quad \text{et} \quad Z^1_{q,+} \oplus E^{n-1}_{q,+}$$

sont opposées, on obtiendra alors que la limite Z^1 est incluse dans $\xi^{n-1}(x)$, qui est la limite commune de D_q^{n-1} et E_q^{n-1}. On aura donc prouvé l'égalité $Z^1 = \xi^{n-1}(x) \cap \xi^2(w)$.

Les orientations sont opposées :
En effet, soit z définissant l'orientation sur Z_q^1,

$$z = t + \lambda v$$

avec t appartenant à $\xi^{n-3}(x_{1,q}) \oplus \xi^1(x_{3,q})$, λ réel et v une base directe de $\xi_+^1(x_{2,q})$. On sait que λ est non nul, car t appartient à l'hyperplan D_q^{n-1} qui est en somme directe avec Z_q^1.

Soit ϵ le signe de λ, alors

$$\begin{aligned}
Z_{q,+}^1 \oplus D_{q,+}^{n-1} &= (\xi_+^1(x_{2,q}) \oplus \xi_+^{n-2}(x_{1,q}) \oplus \xi_+^1(x_{3,q}))_\epsilon \\
&= (\xi_+^{n-2}(x_{1,q}) \oplus \xi_+^1(x_{2,q}) \oplus \xi_+^1(x_{3,q}))_{\epsilon(-1)^{n-2}} \\
&= (\mathbf{R}_+^n)_{\epsilon(-1)^{n-2}} \\
Z_{q,+}^1 \oplus E_{q,+}^{n-1} &= (\xi_+^1(x_{2,q}) \oplus \xi_+^{n-3}(x_{1,q}) \oplus \xi_+^2(x_{3,q}))_\epsilon \\
&= (\xi_+^{n-3}(x_{1,q}) \oplus \xi_+^1(x_{2,q}) \oplus \xi_+^2(x_{3,q}))_{\epsilon(-1)^{n-3}} \\
&= (\mathbf{R}_+^n)_{\epsilon(-1)^{n-3}}.
\end{aligned}$$

Les orientations sont donc opposées. Les espaces entre parenthèses, aux deuxième et cinquième lignes, sont bien égaux à $\mathbf{R}_+^n$ à nouveau par l'homotopie avec la courbe Frenet.

5.3.2. *Démonstration de* $\mathrm{P}_k(1)$. Passons au cas général.

On travaillera, qui plus est, par récurrence descendante sur l'entier $m_{k-1} + m_{k+1}$, nous n'écrivons pas l'hypothèse de récurrence correspondante pour éviter une lourdeur supplémentaire, mais nous indiquerons quand cette récurrence intervient.

Si $m_1 + \cdots + m_{k-1} + 1 + m_{k+1} = m \leq n$, on veut montrer que, lorsque les x_i tendent vers x, la limite de

$$\xi^{m_1}(x_1) \oplus \cdots \oplus \xi^{m_{k-1}}(x_{k-1}) \oplus \xi^1(x_k) \oplus \xi^{m_{k+1}}(x_{k+1})$$

est $\xi^m(x)$. Pour cela, nous verrons que la seule valeur d'adhérence possible est $\xi^m(x)$.

Plus précisément, nous allons orienter les courbes ξ^k sur un segment I inclus dans $\partial\Gamma$ et montrer que ces limites valent encore dans les espaces orientés.

5.3.3. *Orientations.* Fixons une orientation $\xi_+^1(x)$ sur $\xi^1(x)$ continue sur I, *i.e.* on fixe un relèvement ξ_+^1 de ξ^1 sur le segment I.

On oriente encore ξ^k et $\mathbf{R}^n$ par les formules

$$\text{si } x \in I, \quad \xi_+^{k+1}(x) = \lim_{(y>z)\to x} \xi_+^k(y) \oplus \xi_+^1(z),$$

$$\mathbf{R}_+^n = \xi_+^{n-1}(y) \oplus \xi_+^1(z), \text{ si } y > z.$$

Ces orientations sont continues sur I et on montre que, pour tout $l \leq k$,

(1) Si $n_1 + \cdots + n_{l+1} = n$ et si $y_1 > \cdots > y_{l+1}$ sont des points de I, alors on a l'égalité entre espaces vectoriels orientés
$$\mathbf{R}^n_+ = \xi^{n_1}_+(y_1) \oplus \cdots \oplus \xi^{n_{l+1}}_+(y_{l+1}).$$

(2) Si $m_1 + \cdots + m_l = m \leq n$ et si y appartient à I, alors
$$\lim_{(y_i)\to y} \xi^{m_1}_+(y_1) \oplus \cdots \oplus \xi^{m_l}_+(y_l) = \xi^m_+(y),$$
la limite étant prise sur les l-uplets $y_1 > \cdots > y_l$.

Il est facile de voir que le deuxième point ci-dessus est impliqué par le premier et qu'on peut raisonner par récurrence sur l grâce à la proposition 24. Pour montrer l'égalité des orientations dans les cas $l = 1$ et $l = 2$, c'est-à-dire que la somme de trois espaces définit la bonne orientation sur $\mathbf{R}^n$, il faut utiliser, comme plus haut, l'homotopie, dans les courbes 3-hyperconvexes, entre la courbe ξ et la courbe Frenet ξ_0 pour laquelle le lemme 25 s'applique.

5.3.4. *Valeurs d'adhérence.* Soient maintenant un point x de I et des suites $(x_{i,q})_{q\in\mathbf{N}}$ de I, pour i allant de 1 à $k+1$, convergeant vers x et telles que, pour tout q, $x_{1,q} > \cdots > x_{k+1,q}$. On suppose de plus que la limite suivante existe
$$\lim_{q\to+\infty} \xi^{m_1}_+(x_{1,q}) \oplus \cdots \oplus \xi^{m_{k-1}}_+(x_{k-1,q}) \oplus \xi^1_+(x_{k,q}) \oplus \xi^{m_{k+1}}_+(x_{k+1,q}) = P^m_+.$$
On notera $P^m_{q,+}$ le m-espace vectoriel orienté écrit à l'intérieur de cette limite. Par H(k), l'espace vectoriel P^m contient $\xi^{m-1}(x)$.

Fixons w un point de I plus petit que x, alors la suite de droites orientées $Z^1_{q,+} := P^m_{q,+} \cap \xi^{n-m+1}_+(w)$ converge vers la droite orientée $Z^1_+ := P^m_+ \cap \xi^{n-m+1}_+(w)$. Le fait que Z^1_q est de dimension 1 résulte de l'hypothèse de récurrence sur k et Z^1 est une droite par 2-hyperconvexité.

La propriété voulue est donc équivalente à l'égalité
$$Z^1_+ = \xi^m_+(x) \cap \xi^{n-m+1}_+(w).$$
On va d'abord montrer que Z^1 est inclus dans $\xi^m(x)$ puis que les orientations coïncident.

Considérons les suites suivantes d'espaces orientées et leur limites
$$D^{n-1}_{q,+} := \xi^{m_1}_+(x_{1,q}) \oplus \cdots \oplus \xi^{m_{k-1}+1}_+(x_{k-1,q}) \oplus \xi^{m_{k+1}}_+(x_{k+1,q}) \oplus \xi^{n-m-1}_+(w) \xrightarrow{q\to+\infty} \xi^m_+(x) \oplus \xi^{n-m-1}_+(w),$$
$$E^{n-1}_{q,+} := \xi^{m_1}_+(x_{1,q}) \oplus \cdots \oplus \xi^{m_{k-1}}_+(x_{k-1,q}) \oplus \xi^{m_{k+1}+1}_+(x_{k+1,q}) \oplus \xi^{n-m-1}_+(w) \xrightarrow{q\to+\infty} \xi^m_+(x) \oplus \xi^{n-m-1}_+(w).$$

Nous allons montrer que Z^1_q et D^{n-1}_q sont en somme directe, ainsi que Z^1_q et E^{n-1}_q et que les orientations sont opposées

$$Z^1_{q,+} \oplus D^{n-1}_{q,+} = (Z^1_{q,+} \oplus E^{n-1}_{q,+})_{-1}.$$

Z^1_q et D^{n-1}_q sont en somme directe :

Posons

$$T^{m-1}_q = \xi^{m_1}_+(x_{1,q}) \oplus \cdots \oplus \xi^{m_{k-1}}_+(x_{k-1,q}) \oplus \xi^{m_{k+1}}_+(x_{k+1,q}) \subset P^m_q.$$

D'après H(k), T^{m-1}_q et $\xi^{n-m+1}(w)$ sont en somme directe, ce qui implique l'égalité (sans orientations)

$$T^{m-1}_q \oplus Z^1_q = P^m_q.$$

Comme $T^{m-1}_q \subset D^{n-1}_q$, si $Z^1_q \subset D^{n-1}_q$, on aurait $P^m_q \subset D^{n-1}_q$ et donc aussi $\xi^1(x_{k,q}) \subset D^{n-1}_q$ ce qui impliquerait

$$\xi^{m_1}(x_{1,q}) + \cdots + \xi^{m_{k-1}+1}(x_{k-1,q}) + \xi^1(x_{k,q}) + \xi^{m_{k+1}}(x_{k+1,q}) + \xi^{n-m-1}(w) \subsetneq \mathbf{R}^n.$$

Or, par récurrence descendante sur l'entier $m_{k-1} + m_{k+1}$, cette dernière somme est directe, donc Z^1_q et D^{n-1}_q sont en somme directe. Remarquons également que cette récurrence s'initialise bien, car lorsque $m_{k-1} + m_{k+1}$ est maximal, l'entier $n - m - 1$ vaut 0 et la somme considérée est bien directe par H(k). De même, Z^1_q et E^{n-1}_q sont en somme directe.

Les orientations sont opposées :

Soit z un élément de $Z^1_{q,+}$ définissant l'orientation, ce que l'on vient de dire montre que z n'appartient pas à T^{m-1}_q, c'est-à-dire z s'écrit

$$z = t + \lambda v, \text{ avec } t \in T^{m-1}_q,\ \lambda \text{ un réel non nul}$$

et où v est une base directe de $\xi^1_+(x_{k,q})$. Soit ϵ le signe de λ, comme T^{m-1}_q est inclus dans D^{n-1}_q et dans E^{n-1}_q, on a les égalités entre espaces vectoriels orientés

$$Z^1_{q,+} \oplus D^{n-1}_{q,+} = (\xi^1_+(x_{k,q}) \oplus D^{n-1}_{q,+})_\epsilon,$$
$$Z^1_{q,+} \oplus E^{n-1}_{q,+} = (\xi^1_+(x_{k,q}) \oplus E^{n-1}_{q,+})_\epsilon.$$

Il reste donc à montrer que les deux orientations $\xi^1_+(x_{k,q}) \oplus D^{n-1}_{q,+}$ et $\xi^1_+(x_{k,q}) \oplus E^{n-1}_{q,+}$ sont opposées, mais elles sont respectivement égales à

$$\Big(\xi^{m_1}_+(x_{1,q}) \oplus \cdots \oplus \xi^{m_{k-1}+1}_+(x_{k-1,q}) \oplus \xi^1_+(x_{k,q}) \oplus \xi^{m_{k+1}}_+(x_{k+1,q}) \oplus \xi^{n-m-1}_+(w)\Big)_{(-1)^{m_1+\cdots+m_{k-1}+1}}$$

et à

$$\Big(\xi^{m_1}_+(x_{1,q}) \oplus \cdots \oplus \xi^{m_{k-1}}_+(x_{k-1,q}) \oplus \xi^1_+(x_{k,q}) \oplus \xi^{m_{k+1}+1}_+(x_{k+1,q}) \oplus \xi^{n-m-1}_+(w)\Big)_{(-1)^{m_1+\cdots+m_{k-1}}}$$

or, encore par la récurrence descendante sur $m_{k-1}+m_{k+1}$, les deux espaces orientés à l'intérieur des parenthèses sont égaux à $\mathbf{R}^n_+$, ce qui conclut.

Ceci implique que Z^1 est inclus dans la limite commune aux suites D_q^{n-1} et E_q^{n-1}, c'est-à-dire

$$Z^1 \subset \xi^m(x) \oplus \xi^{n-m-1}(w).$$

En utilisant une dernière fois l'hypothèse de récurrence sur $m_{k-1}+m_{k+1}$, on obtient que $P^m \subset \xi^{m+1}(x)$, alors

$$Z^1 \subset \big(\xi^m(x) \oplus \xi^{n-m-1}(w)\big) \cap \xi^{m+1}(x) = \xi^m(x),$$

ce qu'on voulait démontrer.

Ceci montre déjà $\mathrm{P}_k(1)$ pour le $(k+1)$-uplets $(m_1, \ldots, m_{k-1}, 1, m_{k+1})$, il faut encore montrer l'égalité des orientations qui nous permettait de faire la récurrence sur $m_{k-1}+m_{k+1}$.

Pour montrer l'égalité $P^m_+ = \xi^m_+(x)$, il suffit de montrer que, pour tous $x_1 > \cdots > x_{k+1} > w$ appartenant à I

$$(\#) \quad \mathbf{R}^n_+ = \xi_+^{m_1}(x_1) \oplus \cdots \oplus \xi_+^{m_{k-1}}(x_{k-1}) \oplus \xi^1_+(x_k) \oplus \xi_+^{m_{k+1}}(x_{k+1}) \oplus \xi_+^{n-m}(w).$$

Car on aura alors $\mathbf{R}^n_+ = P^m_{q,+} \oplus \xi^{n-m}_+(w)$, donc $\mathbf{R}^n_+ = P^m_+ \oplus \xi^{n-m}_+(w) = \xi^m_+(x) \oplus \xi^{n-m}_+(w)$, ce qui implique bien $P^m_+ = \xi^m_+(x)$.

On sait maintenant que les sommes dans (#) sont directes (par la proposition 24 et la continuité que l'on vient de prouver) et l'orientation définie dans l'égalité (#) ne dépend pas de $x_1 > \cdots > x_{k+1} > w$. On connaît la limite suivante d'espaces orientés

$$\lim_{(x_{k-1}>x_k)\to y} \xi_+^{m_{k-1}}(x_{k-1}) \oplus \xi^1_+(x_k) = \xi_+^{m_{k-1}+1}(y)$$

et aussi l'égalité, si $x_1 > \cdots > x_{k-2} > y > x_{k+1} > w$

$$\mathbf{R}^n_+ = \xi_+^{m_1}(x_1) \oplus \cdots \oplus \xi_+^{m_{k-2}}(x_{k-2}) \oplus \xi_+^{m_{k-1}+1}(y) \oplus \xi_+^{m_{k+1}}(x_{k+1}) \oplus \xi_+^{n-m}(w),$$

d'où l'égalité (#). Ce qui termine la démonstration de $\mathrm{P}_k(1)$.

5.3.5. *Démonstration de* $\mathrm{P}_k(m_k) \Rightarrow \mathrm{P}_k(m_k+1)$. C'est exactement la même démonstration que $\mathrm{P}_k(1)$, nous ne la refaisons pas.

Ceci termine la démonstration du théorème 23.

6. Adhérence des représentations hyperconvexes

Comme nous l'avons déjà annoncé dans l'introduction, nous sommes amenés à considérer l'adhérence $\overline{H}$ de l'ensemble des représentations hyperconvexes dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$. Le résultat principal de cette partie sera de montrer l'ouverture de cet ensemble, ce qui permettra de conclure le théorème 1.

Proposition 26. *Si le genre de la surface Σ est assez grand (c'est-à-dire plus grand qu'une constante dépendant de n), alors, toujours avec*

$\Gamma = \pi_1(\Sigma)$, *l'adhérence des représentations hyperconvexes est ouvert dans* $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$.

Nous commencerons par montrer que cette proposition implique le théorème 1. Par ailleurs, ce théorème implique facilement cette proposition sans restriction sur le genre. Cependant nous aurons besoin de cette étape intermédiaire.

La démonstration de cette proposition, faite dans le paragraphe 6.3, utilisera deux points essentiels. Le premier est un résultat de fermeture dû à F. Labourie :

Proposition 27. *Une représentation ρ fortement irréductible et limite de représentations hyperconvexes est elle-même hyperconvexe.*

Cette proposition est démontrée dans les paragraphes 9.3–9.5 de [12]. Le second point est les propriétés de densité et de connexité de l'ensemble des représentations irréductibles qui sont démontrées dans [8] (voir les faits 1 et 2).

6.1. **Démonstration du théorème 1 en genre grand.** Si le genre de la surface est assez grand, la proposition implique donc que $\overline{H}$ est une réunion de composantes connexes de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$. D'après les travaux de N. Hitchin ([10] théorème B), ces composantes connexes sont au nombre de trois ou six, selon la parité de $n \geq 3$. Une ou deux de ces composantes contiennent des représentations n-fuchsiennes, ce sont les composantes de Hitchin dont nous voulons montrer l'égalité avec l'ensemble des représentations hyperconvexes. Toujours d'après Hitchin, les deux ou quatre autres composantes contiennent des représentations à valeurs dans le groupe compact $\mathrm{PSO}_n(\mathbf{R})$. En outre, il découle aussi de ces travaux que les représentations des composantes de Hitchin sont fortement irréductibles.

Ceci implique d'abord que les composantes de Hitchin sont constituées de représentations hyperconvexes. En effet, comme $\overline{H}$ est une réunion de composantes connexes et que les représentations n-fuchsiennes sont hyperconvexes et donc appartiennent à $\overline{H}$, les composantes de Hitchin sont incluses dans $\overline{H}$. Toute représentation dans les composantes de Hitchin est alors limite de représentations hyperconvexes et est fortement irréductible, donc est elle-même hyperconvexe par la proposition 27. On en déduit que les composantes de Hitchin sont incluses dans l'ensemble des représentations hyperconvexes.

Pour conclure, il suffit maintenant de prouver que $\overline{H}$ ne contient que les composantes de Hitchin. Si ce n'est pas le cas, $\overline{H}$ contiendrait des représentations à valeurs dans $\mathrm{PSO}_n(\mathbf{R})$. Mais tout élément de $\overline{H}$ est limite de représentations fidèles et discrètes et est donc fidèle et discrète ([6] lemme 1.1) et ainsi ne peut être à valeurs dans un groupe compact, d'où la contradiction et le théorème.

6.2. **Démonstration dans le cas général.** Le cas général va résulter des deux lemmes suivants.

Lemme 28. *Soit* Γ' *un sous-groupe d'indice fini de* Γ *et* ρ *une représentation de* Γ*. La représentation* ρ *est alors hyperconvexe si, et seulement si,* $\rho_{|\Gamma'}$ *est hyperconvexe.*

Démonstration : Le sens direct est évident. Réciproquement supposons que larestriction à Γ' de ρ est hyperconvexe. On peut supposer que Γ' est distingué dans Γ quitte à le remplacer par l'intersection (finie) de ses conjugués. Le bord de Γ et celui de Γ' s'identifie naturellement. On dispose donc d'une courbe

$$\xi^1 : \partial\Gamma \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{R}^n)$$

continue, hyperconvexe et Γ'-équivariante. Pour tout g dans Γ, la courbe

$$\partial\Gamma \rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{R}^n) \,/\, x \mapsto \rho(g) \cdot \xi^1(g^{-1} \cdot x)$$

est encore continue, hyperconvexe et Γ'-équivariante. Par unicité, elle est donc égale à ξ^1, c'est-à-dire

$$\text{pour tout } x \text{ dans } \partial\Gamma,\ \xi^1(x) = \rho(g) \cdot \xi^1(g^{-1} \cdot x).$$

Ceci signifie exactement que ξ^1 est Γ-équivariante, ce qu'on voulait. *q.e.d.*

Lemme 29. *Soit* Γ' *un sous-groupe d'indice fini de* Γ*, alors une représentation* ρ *de* $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$ *appartient à la réunion des composantes de Hitchin si, et seulement si, la restriction à* $\rho_{|\Gamma'}$ *appartient aux composantes de Hitchin.*

Démonstration : Si ρ est une représentation des composantes de Hitchin, alors elle se déforme continûment en une représentation n-fuchsienne. Sa restriction se déforme donc continûment en une représentation n-fuchsienne et appartient ainsi aux composantes de Hitchin.

Dans le cas contraire, ρ se déforme continûment en une représentation à valeurs dans $\mathrm{PSO}_n(\mathbf{R})$, donc sa restriction $\rho_{|\Gamma'}$ aussi, ce qui prouve qu'elle n'est pas dans les composantes de Hitchin. *q.e.d.*

Ces deux lemmes permettent de conclure facilement le théorème pour Γ quelconque. En effet, fixons nous Γ' un sous-groupe d'indice fini de Γ de genre assez grand, alors

$$\begin{aligned} \rho \text{ est hyperconvexe } &\Leftrightarrow \rho_{|\Gamma'} \text{ est hyperconvexe} \\ &\Leftrightarrow \rho_{|\Gamma'} \text{ est dans les composantes de Hitchin} \\ &\Leftrightarrow \rho \text{ est dans les composantes de Hitchin.} \end{aligned}$$

6.3. **Ouverture de l'adhérence.** Nous allons utiliser les deux résultats suivants de [8].

Fait 1. *([8], corollaire 3)*

Si le genre de la surface est assez grand (en fonction de n*), alors dans chaque composante connexe de* $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$ *l'ensemble des points lisses est connexe par arcs.*

Notons que ce corollaire est énoncé pour le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ dans l'article cité, mais les mêmes outils permettent de montrer sans changement la forme ci-dessus.

Fait 2. *([8], théorème 21)*
Supposons le genre d'une surface $\hat{\Sigma}$ assez grand (plus grand qu'une constante dépendant de n) et soit ρ une représentation de $\hat{\Gamma} = \pi_1(\hat{\Sigma})$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ telle que l'adhérence de Zariski de $\rho(\hat{\Gamma})$ est connexe pour la topologie de Zariski.
Alors, pour tout sous-groupe Γ' d'indice fini de $\hat{\Gamma}$, il existe un voisinage $\hat{U}$ de ρ dans $\mathrm{Hom}(\hat{\Gamma}, \mathrm{SL}_n(\mathbf{R}))$ tel que
$$\{\rho' \in \hat{U} \mid \rho'_{|\Gamma'} \text{ est irréductible}\}$$
est dense dans $\hat{U}$ et est connexe par arcs.

On se fixe un minorant sur le genre pour que ces deux faits soient valables.
On suppose maintenant que Γ est le groupe fondamental d'une surface Σ compacte, sans bords, connexe, orientable et de genre g plus grand que la borne donnée pour ces deux faits. On veut démontrer l'ouverture de $\overline{H}$ (proposition 26). Le lemme suivant nous permet de ne considérer plus que les représentations semi-simples.

Lemme 30. *Si $\overline{H}$ est un voisinage de toutes ses représentations semi-simples, alors $\overline{H}$ est ouvert.*

Démonstration : En effet soit ρ dans $\overline{H}$. L'adhérence de l'orbite $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}) \cdot \rho$ contient toujours des représentations semi-simples, soit ρ' l'une d'entre. Comme $\overline{H}$ est fermé, ρ' est une représentation semi-simple de $\overline{H}$ et il existe U' un voisinage de ρ' inclus dans $\overline{H}$. Aussi, par le choix de ρ', il existe g dans $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$ tel que $g^{-1} \cdot \rho$ appartient à U'. Alors $U = g \cdot U'$ est un voisinage de ρ inclus dans $\overline{H}$, car $\overline{H}$ est invariant par $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$. *q.e.d.*
La proposition 26 sera donc démontrée une fois que l'on aura prouvé le

Lemme 31. *Pour toute représentation ρ_0 semi-simple dans $\overline{H}$, il existe un voisinage U de ρ_0 inclus dans $\overline{H}$.*

Nous allons dans un premier temps voir que les trois lemmes qui suivent permettent de conclure.

Lemme 32. *Soit ρ une représentation semi-simple appartenant à $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$ et telle que, pour tout γ, $\rho(\gamma)$ est à valeurs propres réelles. Notons G_0 la composante neutre de l'adhérence de Zariski de $\rho(\Gamma)$. Le groupe G_0 est alors un groupe réductif déployé sur $\mathbf{R}$.*

Lemme 33. *Il existe un entier c dépendant de n et pour lequel, si G est un sous-groupe réductif de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, alors il existe G' un sous-groupe de G d'indice inférieur à c tel que G' est le presque produit d'un groupe abélien fini A et de sa composante neutre G_0 :*
$$G' = A \cdot G_0$$

et A centralise G_0.

Lemme 34. *Soit V un $A\times G_0$-module simple où A est un groupe abélien fini et G_0 est un groupe réductif déployé sur $\mathbf{R}$. Il existe alors V_A un A-module simple et V_0 un G_0-module simple tels que $V = V_A \otimes_{\mathbf{R}} V_0$.*

Notons que V_A est donné par un caractère χ. Si ce caractère est à valeurs réelles $V_A = \mathbf{R}$ et s'il est à valeurs complexes $V_A = \mathbf{C}$.

Démonstration du lemme 31 : Soit ρ_0 une représentation de $\overline{H}$ semi-simple, il existe alors un sous-groupe $\hat{\Gamma}$ d'indice fini de Γ tel que l'adhérence de Zariski de $\rho_0(\hat{\Gamma})$ est connexe au sens de Zariski. Quitte à prendre un sous-groupe d'indice deux, on peut supposer que $\rho_{0|\hat{\Gamma}}$ se relève à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, ceci restera vrai dans un voisinage de $\rho_{0|\hat{\Gamma}}$ et on ne travaillera donc qu'avec des représentations de $\mathrm{Hom}(\hat{\Gamma}, \mathrm{SL}_n(\mathbf{R}))$. Le groupe $\hat{\Gamma}$ est le groupe fondamental d'une surface de genre plus grand que le genre de Σ de sorte que le fait 2 s'applique. Notons Γ' le sous-groupe de $\hat{\Gamma}$ intersection des sous-groupes d'indice inférieur à $2^n c$, où c est la constante du lemme 33. Ce groupe Γ' est d'indice fini dans $\hat{\Gamma}$ car il n'y a qu'un nombre fini de morphismes de groupes de $\hat{\Gamma}$ vers le groupe symétrique sur $2^n c$ éléments.

Par le fait 2, il existe un voisinage $\hat{U}$ de $\rho_{0|\hat{\Gamma}}$ tel que l'ensemble

$$\hat{V} = \{\rho \in \hat{U} \mid \rho_{|\Gamma'} \text{ est irréductible}\}$$

est dense dans $\hat{U}$ et est connexe par arcs.

Notons U un voisinage de ρ_0 dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}))$ tel que, pour tout ρ dans U, la restriction $\rho_{|\hat{\Gamma}}$ (qui se relève à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$) appartient à $\hat{U}$. On va montrer que l'ensemble

$$V = \{\rho \in U \mid \rho_{|\Gamma'} \text{ est irréductible}\}$$

est constitué de représentations hyperconvexes et est dense dans U.

Remarquons d'abord que V est non vide, en effet il existe par hypothèse des représentations hyperconvexes dans U et celles-ci sont fortement irréductibles donc dans V.

<u>L'ensemble V est dense dans U</u> :

L'application de restriction de Γ à Γ' est notée Res, *i.e.* $\mathrm{Res}(\rho) = \rho_{|\Gamma'}$. Ainsi $\mathrm{Res}(\rho)$ n'est pas irréductible si, et seulement si, elle est conjuguée à une représentation de $\mathrm{Hom}(\Gamma', P_i)$ pour un certain i avec $(P_i)_{0<i<n}$ la liste finie des paraboliques « standards » de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ (*i.e.* P_i est le stabilisateur d'un sous-espace vectoriel de dimension i). Ceci donne

$$V = U - \bigcup_i \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R}) \cdot \mathrm{Res}^{-1}(\mathrm{Hom}(\Gamma', P_i)),$$

c'est-à-dire V est le complémentaire d'une réunion finie de sous-espaces analytiques. Dans $\mathbf{R}^N$ il est clair que le complémentaire d'une telle réunion est dense quand elle est non-vide. En utilisant la connexité des points lisses (fait 1), qui ont un voisinage analytiquement isomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^N$, on obtient bien que V est dense.

V est inclus dans les représentations hyperconvexes :

Soit ρ_a une représentation hyperconvexe dans V (il en existe) et ρ_b un élément quelconque de V. On veut montrer que ρ_b est hyperconvexe.

Par la connexité de $\hat{V}$, il existe un chemin continu $(\rho_t)_{t\in[0,1]}$ dans $\mathrm{Hom}(\hat{\Gamma}, \mathrm{SL}_n(\mathbf{R}))$ tel que $\rho_0 = \rho_{a|\hat{\Gamma}}$, $\rho_1 = \rho_{b|\hat{\Gamma}}$ et $\rho_{t|\Gamma'}$ est irréductible pour tout t. Par le lemme 28, il suffit de montrer que ρ_1 est hyperconvexe.

Notons J l'ensemble des t dans $[0,1]$ tel que ρ_t est hyperconvexe. Cet ensemble est non-vide car 0 appartient à J, il est ouvert car l'ensemble des représentations hyperconvexes est ouvert (théorème 23).

Soit donc t appartenant à $\overline{J}$, ρ_t est donc limite de représentations hyperconvexe et pour pouvoir appliquer la proposition 27 il faut savoir si ρ_t est fortement irréductible. Ceci se traduit par le fait que G_0, la composante neutre de $G = \overline{\rho_t(\hat{\Gamma})}^Z$, agit de manière irréductible sur $\mathbf{R}^n$. Le groupe G est réductif car la représentation ρ_t est irréductible, donc par le lemme 33 il admet un sous-groupe G' d'indice inférieur à c qui est le presque produit d'un groupe abélien fini A et de la composante neutre G_0. Comme, pour tout γ, $\rho_t(\gamma)$ est limite d'éléments diagonalisables sur $\mathbf{R}$, $\rho_t(\gamma)$ est à valeurs propres réelles et donc le lemme 32 dit que le groupe G_0 est déployé sur $\mathbf{R}$. Par hypothèse, l'action de G' sur $\mathbf{R}^n$ est irréductible (car Γ' contient tous les sous-groupes d'indice inférieur à c), *i.e.* le $A \times G_0$-module $\mathbf{R}^n$ est simple. Par le lemme 34, il s'écrit comme le produit tensoriel $\mathbf{R}^n = V_A \otimes_{\mathbf{R}} V_0$ où V_A et V_0 sont respectivement un A-module simple et un G_0-module simple. Si $V_A = \mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n = V_0$ sera un G_0-module simple, ce qu'on voulait démontrer.

Supposons par l'absurde que $V_A = \mathbf{C}$, le module V_A est donné par un caractère $\chi : A \to \mathbf{C}^*$. Pour tout γ les valeurs propres de $\rho_t(\gamma)$ sont réelles et sont de la forme

$$\chi(a)\lambda \text{ et } \overline{\chi}(a)\lambda$$

où λ est une valeur propre d'un élément de G_0 dans V_0 et a un élément de A. Ceci prouve que

$$\text{pour tout } a,\ \chi(a) \in \mathbf{R} \cup i\mathbf{R}$$

et donc que la restriction de χ au sous-groupe A^2 est à valeurs dans $\mathbf{R}^*$. Le $A^2 \times G_0$-module $\mathbf{R}^n$ n'est donc pas simple. Or A étant un sous-groupe abélien de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, il est le produit d'au plus n groupes cycliques et l'indice de A^2 dans A est inférieur à 2^n. Mais comme Γ' contient tous les sous-groupes d'indice inférfieur à $2^n c$ et que $\rho_{t|\Gamma'}$ est irréductible, $A^2 \times G_0$ agit de manière irréductible sur $\mathbf{R}^n$ d'où la contradiction.

On a bien montré que $\mathbf{R}^n$ est simple comme G_0-module et donc que la représentation ρ_t est hyperconvexe. L'ensemble J est ainsi fermé et est donc égal à $[0,1]$. La représentation $\rho_1 = \rho_{b|\hat{\Gamma}}$ est aussi hyperconvexe et ρ_b également. Comme ρ_b était un élément quelconque de V, l'ensemble V est bien inclus dans l'ensemble des représentations hyperconvexes.

Ce qui conclut que U est inclus dans $\overline{H}$, ce qu'on voulait. *q.e.d.*

6.4. **Adhérences de Zariski.** Nous démontrons dans ce paragraphe les lemmes techniques, que l'on vient d'utiliser, sur les adhérences de Zariski des représentations de $\overline{H}$.

Démonstration du lemme 32 : Rappelons l'énoncé à obtenir, $\rho : \Gamma \to \mathrm{PSL}_n(\mathbf{R})$ est une représentation semi-simple telle que, pour tout γ, $\rho(\gamma)$ est à valeurs propres réelles, on veut montrer que l'adhérence de Zariski de $\rho(\Gamma)$ est un groupe réductif déployé sur $\mathbf{R}$.

Notons G_0 la composante neutre de cet adhérence de Zariski. La propriété à obtenir est une propriété de cette composante neutre. Comme ρ est semi-simple, le groupe G_0 est réductif.

Un sous-groupe compact maximal de G_0 est noté K et son algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Soit $\mathfrak{p}$ l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ pour la forme de Killing sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G_0, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Soit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ un sous-espace de Cartan. Le groupe $A = \exp(\mathfrak{a})$ est donc un tore déployé maximal du groupe G_0. La composante neutre $Z(A)_0$ du centralisateur de A est le produit direct d'un tore compact, isomorphe à $(S^1)^l$ et de A et la propriété à montrer est que $l = 0$, c'est-à-dire $\dim A = \dim Z(A)$.

L'ensemble G_0^{reg} des éléments semi-simples réguliers de G_0 contient un ouvert de Zariski ([3] théorème 12.3), rappelons qu'un élément semi-simple x est dit régulier si la composante neutre $Z(x)_0$ de son centralisateur est un tore (nécessairement maximal). Les éléments semi-simples réguliers de Γ sont donc encore Zariski-dense. Mais, les éléments semi-simples de la forme $\rho(\gamma)$ sont diagonalisables à valeurs propres réelles, ce qui veut dire qu'une puissance de $\rho(\gamma)$ est conjuguée à un élément de A

$$\rho(\gamma)^k \in {}^{G_0}A := \bigcup_{g \in G_0} g^{-1} A g.$$

Comme $\rho(\gamma)$ appartient à l'adhérence de Zariski de $(\rho(\gamma)^{km})_{m \in \mathbf{N}}$, on en déduit que ${}^{G_0}A$ est Zariski dense dans G_0. Or cet ensemble est l'image de $G_0 \times A$ par une application algébrique et est donc un constructible, ce qui impose qu'il est ouvert dans G_0 et que

$$\dim G_0 = \dim {}^{G_0}A = \dim G_0 + \dim A - \dim Z(A),$$

ce qui montre l'égalité cherchée : $\dim A = \dim Z(A)$. *q.e.d.*

Démonstration du lemme 33 : Il fallait ici démontrer l'existence d'une constante $c = c(n)$ telle que, pour tout sous-groupe réductif G de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, il existe G' un sous-groupe de G d'indice au plus c qui s'écrit

$$G' = A \cdot G_0$$

où G_0 est la composante neutre de G et A est un groupe abélien fini centralisante G_0.

Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ l'algèbre de Lie dérivée qui est ici une algèbre de Lie semi-simple de dimension inférieure ou égale à n^2. Le groupe de Lie G agit sur l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{s}$, ce qui permet de définir un morphisme

$$G \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathfrak{s})$$

de G dans l'ensemble des morphismes extérieurs de $\mathfrak{s}$. Le groupe $\mathrm{Out}(\mathfrak{s})$ est fini et comme il n'y a qu'un nombre fini d'algèbres de Lie simples de dimension donnée, on peut supposer que l'application $G \to \mathrm{Out}(\mathfrak{s})$ est nulle quitte à passer à un sous-groupe dont l'indice est majoré en fonction de n.

Soit F le noyau de la représentation $G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{s})$. Comme l'application $G \to \mathrm{Out}(\mathfrak{s})$ est triviale et que le morphisme $G_0 \to \mathrm{Inn}(\mathfrak{s})$ de G_0 dans le groupe des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{s}$ est surjectif, G s'écrit comme le produit $F \cdot G_0$. Il suffit donc de montrer le lemme pour le groupe F.

Soit E un sous-groupe compact maximal de F. Par un théorème de Mostow ([13] théorème 3.1), F est égal au produit EF_0 avec F_0 la composante neutre de F et l'on est ramené à montrer le lemme pour le groupe E.

Par définition de F, la composante neutre F_0 est central dans G_0 et donc il en est de même pour E_0 la composante neutre de E. Ainsi E_0 est un tore compact $(S^1)^k$.

L'action de E_0 se diagonalise sur $\mathbf{C}^n$ et $\mathbf{C}^n$ s'écrit comme une somme $\bigoplus V_\chi$ où $\chi : E_0 \to \mathbf{C}^*$ sont des caractères de E_0 et V_χ les espaces propres associés. Le groupe E permute ses facteurs (V_χ), ce qui définit une action de E sur un ensemble à moins de n éléments. En passant à un sous-groupe d'indice inférieur ou égal à $n!$ on peut supposer que cette action est triviale, ce qui signifie que E est un sous-groupe du produit $\Pi\mathrm{GL}(V_\chi)$.

Il suffit maintenant de montrer le lemme pour l'image de E dans l'un des $\mathrm{GL}(V_\chi)$. Notons E_χ cette image, ici la composante neutre de ce groupe est égale au sous-groupe $S^1 \cdot \mathrm{Id}$ des matrices scalaires et E est le produit du groupe fini $E_\chi \cap \mathrm{SL}(V_\chi)$ et de $S^1 \cdot \mathrm{Id}$. Le lemme résulte du lemme suivant appliqué à $E_\chi \cap \mathrm{SL}(V_\chi)$. *q.e.d.*

Lemme 35. *(Jordan)*

Il existe un entier d dépendant de n et tel que tout sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$ *admet un sous-groupe commutatif d'indice inférieur à d.*

Démonstration : Soit E un tel sous-groupe, on peut supposer que E est inclus dans $\mathrm{SU}_n(\mathbf{C})$. Il existe un voisinage Ω de l'identité dans $\mathrm{SU}_n(\mathbf{C})$ tel que toute partie P de Ω, engendrant un groupe discret, est contenue dans un groupe nilpotent connexe ([14] chapitre 8). Ici un tel groupe nilpotent est commutatif, le groupe A engendré par $E \cap \Omega$ est donc commutatif et d'indice au plus $1/\mu(\Omega)$ où μ est la mesure de Haar sur $\mathrm{SU}_n(\mathbf{C})$. *q.e.d.*

Démonstration du lemme 34 : (Cette démonstration est une petite adaptation du lemme 6.5.a de [1]).

Soit donc V un $A \times G_0$-module simple, on veut montrer que V est isomorphe à un produit tensoriel $V_A \otimes_{\mathbf{R}} V_0$ où V_A est un A-module simple et V_0 est un G_0-module simple. Le groupe A est un groupe fini commutatif et G_0 un un groupe réductif connexe déployé sur $\mathbf{R}$.

Supposons d'abord que V a une structure complexe (compatible avec l'action de $A \times G_0$). Notons V_A un sous A-module (sur $\mathbf{C}$) simple de V. Comme A est commutatif, V_A est isomorphe à $\mathbf{C}$. Le $\mathbf{C}$-espace vectoriel

$$W = \mathrm{Hom}_A(V_A, V)$$

est un G_0-module et l'application

$$V_A \otimes_{\mathbf{C}} W \to V \mid v \otimes \varphi \mapsto \varphi(v)$$

est un morphisme de $A \times G_0$-modules et est un isomorphisme par dimension et simplicité de V. On en déduit que W est simple.

La théorie du plus haut poids nous donne alors que W est associé à un caractère d'un tore maximal de G_0. Par hypothèse ce tore est isomorphe à $(\mathbf{R}_+^*)^l$ et le caractère donnant W est nécessairement à valeurs dans $\mathbf{R}$. Ceci prouve que W à une strucure réelle : $W = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} V_0$ avec V_0 un G_0-module simple (réel). Ainsi $V = V_A \otimes_{\mathbf{R}} V_0$, ce qu'on voulait.

Si V n'a pas de structure complexe compatible avec l'action de $A \times G_0$, posons encore V_A un sous-A-module simple de V. Comme espace vectoriel, V_A est égal au corps $\mathbf{k}$ des réels ou des complexes. Le G_0-module $V_0 = \mathrm{Hom}_A(V_A, V)$ a alors aussi une structure sur $\mathbf{k}$ et l'on retrouve que V est isomorphe à $V_A \otimes_{\mathbf{k}} V_0$. Comme V n'a pas de structure complexe, ceci impose $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ ce qu'on cherchait. *q.e.d.*

Références

[1] Y. Benoist – « Convexes divisibles. III », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **38** (2005), no. 5, p. 793–832, MR2195260, Zbl pre05009848.

[2] J. Bochnak, M. Coste et M.-F. Roy – *Géométrie algébrique réelle*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 12, Springer-Verlag, Berlin, 1987, MR0949442, Zbl 0633.14016.

[3] A. Borel – *Linear algebraic groups*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer-Verlag, New York, 1991, MR1102012, Zbl 0726.20030.

[4] S. Choi et W. M. Goldman – « Convex real projective structures on closed surfaces are closed », *Proc. Amer. Math. Soc.* **118** (1993), no. 2, p. 657–661, MR1145415, Zbl 0810.57005.

[5] É. Ghys et P. de la Harpe (éds.) – *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, vol. 83, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990, Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988, MR1086648, Zbl 0731.20025.

[6] W. M. Goldman et J. J. Millson – « Local rigidity of discrete groups acting on complex hyperbolic space », *Invent. Math.* **88** (1987), no. 3, p. 495–520, MR0884798, Zbl 0627.22012.

[7] W. M. Goldman – « Convex real projective structures on compact surfaces », *J. Differential Geom.* **31** (1990), no. 3, p. 791–845, MR1053346, Zbl 0711.53033.

[8] O. Guichard – « Densité et connexité des représentations irréductibles des groupes de surface dans le groupe général linéaire », à paraître dans Transform. Groups.

[9] O. Guichard – « Une dualité pour les courbes hyperconvexes », *Geom. Dedicata* **112** (2005), p. 141–164, MR2163895, Zbl 1080.22005.

[10] N. J. Hitchin – « Lie groups and Teichmüller space », *Topology* **31** (1992), no. 3, p. 449–473, MR1174252, Zbl 0769.32008.

[11] A. Katok et B. Hasselblatt – *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 54, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza, MR1326374, Zbl 0878.58019.

[12] F. Labourie – « Anosov flows, surface groups and curves in projective space », *Invent. Math.* **165** (2006), no. 1, p. 51–114, MR2221137.

[13] G. D. Mostow – « Self-adjoint groups », *Ann. of Math. (2)* **62** (1955), p. 44–55, MR0069830, Zbl 0065.01404.

[14] M. S. Raghunathan – *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer-Verlag, New York, 1972, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 68, MR0507234, Zbl 0254.22005.

Laboratoire de Mathématique, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay,
E-mail address: `Olivier.Guichard@math.u-psud.fr`