Analyse MI4 2005

1 Suites de fonctions.

1.1 Convergence simple, uniforme

1.1.1 Étudier la convergence des suites de fonctions :

(1) f_n: $]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ $x\to\frac{1}{1+nx}$
(2) f_n: $]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ $x\to x\,e^{-nx}$
(3) f_n: $]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ $x\to\frac{x^\alpha}{1+nx}$
(4) f_n: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\to\frac{x}{1+n^2x^2}$
(5) f_n: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\to\int_0^n e^{-(1+x^2)t^2}\mathrm{dt}$
(6) f_n: $[0,1]\to\mathbb{R}$ $f_n(x)=\frac{nx}{1+nx}$

Pour chacune de ces suites, on étudiera la convergence simple, la convergence uniforme, et le cas échéant la convergence uniforme sur tout intervalle compact contenu dans l'intervalle de définition. On fera une esquisse de leurs graphes.

1.1.2 On définit $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ par $f_n(0)=0$, $f_n(x)=x(\sin\frac{1}{x})^{2n}$ si $x\neq 0$

Dessiner le graphe de f_n Montrer que f_n converge simplement vers une fonction f^*, mais que cette convergence n'est pas uniforme.

1.1.3 Soit Ω une partie de $\mathbb{R}$, f_n, g_n deux suites de fonctions convergeant uniformément vers f, g. Montrer que si f, g sont bornées la convergence de f_ng_n vers fg est uniforme.

Étudier le cas ou $f_n=g_n$ est définie par $f_n(x)=x+1/n$

1.2 Interversion d'une limite et d'une intégrale.

1.2.1 Pour les fonctions suivantes, a-t-on $\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt$

$f_n(x)=x^n, a=0, b=1$
$f_n(x)=nx^2e^{-nx^3}, a=0, b=1$

1.2.2 Soit f_n: $[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ $f_n(x)=\frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}$. Montrer que f_n converge uniformément vers la fonction constante nulle mais que $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt=1$ pour tout n

1.2.3 Construire une suite de fonctions continues, positives f_n: $[0, 1]\to\mathbb{R}$ telles que f_n converge simplement vers 0, mais telle que $\int_0^1 f_n(t)\,dt$ converge vers $+\infty$. Plus généralement, a_n étant une suite donnée, montrer qu'il existe une suite de fonctions continues, positives f_n: $[0, 1]\to\mathbb{R}$ telles que f_n converge simplement vers 0, mais telle que $\int_0^1 f_n(t)\,dt=a_n$.

1.2.4 On considère la suite de fonctions f_n: $[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=e^{-x^n}$. Montrer que f_n converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.

Montrer que, si $a>1$, sur $[a,+\infty[$ la suite de fonctions $g_n(x)=x^2 f_n$ converge uniformément vers 0, et en déduire que $\int_a^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{dt}\to 0$.

Montrer que $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{dt}$ converge.

1.3 Interversion d'une limite et d'une dérivée.

1.3.1 On pose $F_n[-1,1]\to\mathbb{R}$ $F_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$. Montrer que F_n converge uniformément vers $|x|$. Étudier le comportement de F_n'.

1.3.2 Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes telle que $|c_n|<\frac{1}{n^2}$. Soit $S_n(x)=\Sigma_{-n\leqslant k\leqslant n}$ $c_n\exp\,(inx)$. Montrer, en utilisant le critère de Cauchy, que pour tout x, la suite $S_n(x)$ converge. On note $S(x)$ sa limite. Montrer que $|S-S_n|(x)\leqslant 2\sum_{n+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, et en déduire que S_n converge uniformément vers S.

On suppose que $|c_n|<\frac{1}{n^3}$. Montrer que S est dérivable et calculer sa dérivée.

On suppose que $|c_n|<\frac{1}{n^{2+k}}$. Montrer que S est k fois dérivable.

1.3.3 Soit $f_n(x)=\mathrm{Arctg}\,\frac{x}{n}$. Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions f_n et f_n'.

1.3.4 Soit $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$. Montrer que cette suite de fonctions converge uniformément vers 0 mais que la suite de fonctions f_n' converge simplement vers une fonction $h\neq 0$

1.4 Approximation d'une fonction par une suite spéciale.

1.4.1 Soit f une fonction continue de $[a,b]\to\mathbb{C}$. On sait que f est uniformément continue, c'est à dire que pour tout $\varepsilon>0$ il existe une α tel que si $|x-y|<\alpha$ alors $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. En spécialisant $\varepsilon=1/n$ montrer que f est limite uniforme de fonctions continues affines par morceaux.

2 Séries de fonctions.

2.1 Série géométrique, série exponentielle.

2.1.1 Sommer les séries de terme général $x^n\cos(\alpha+n\beta)$, $x^n\sin(\alpha+n\beta)$, les séries de terme général $e^{-nx}\cos(\alpha+n\beta)$, $x^n e^{-nx^2}\sin(\alpha+n\beta)$

2.1.2 Trouver la somme de la série de t.g. $\frac{(-1)^p}{2^{2p}}\cos(2px)$

2.1.3 Trouver la somme de la série de t.g. $\frac{\cos(2px)}{p!}$, de la série $\frac{\exp^{-nx^2}\sin(\alpha+n\beta}{n!})$

2.2 Convergence simple, convergence uniforme, convergence absolue, convergence normale.

2.2.1 Étudier la convergence des séries de fonctions.

Pour chacune de ces séries, on étudiera la convergence simple, la convergence absolue, la convergence uniforme, la convergence normale et, le cas échéant, la convergence uniforme ou normale sur tout intervalle compact contenu dans l'intervalle de définition.

(1) sur $\mathbb{R}$ $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ (-1)^k \frac{x}{k}$

(2) sur $[0,1]$ $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \frac{x^{k+1}}{2k+2}$

(3) sur $\mathbb{R}$ $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ \mathrm{Log}\,(1 + \frac{x^2}{k^2})$

(4) sur $\mathbb{R}$ $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ \frac{(-1)^n}{x^2+n^2}$

(5) sur $\mathbb{R}$ $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ \frac{1}{n+n^3x}$

(6) sur $[0,\pi]$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ \cos^k x . \sin x$

(7) sur $[0,+\infty[$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ \frac{kx}{1+k^4x^2}$.

(8) $*$ sur $\mathbb{R}$ $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ (-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}$

2.3 Exemples bizarres

a) Soit $H(x)$ la fonction qui vaut 1 si $x \geqslant 0$, 0 si $x < 0$, et soit a_n une suite de nombres réels. On considère la série de t.g. $u_n(x) = \frac{H(x-a_n)}{10^n}$

Montrer que la série converge uniformément vers une fonction croissante, bornée, continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ et discontinue en tout point de la suite a_n.

b) Soit $D(x) = x - E(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x, c'est à dire le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.

Montrer que la série de t.g $\frac{D(nx)}{2^n}$ converge uniformément sur R

Étudier la continuité de la somme de cette série au voisinage d'un point de $\mathbb{Q}$ et d'un point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2.4 Intégration terme à terme de la somme d'une série.

2.4.1 Montrer que la série de t.g. ne^{-nx} converge uniformément sur $[h,+\infty[$ pour tout $h > 0$. Soit f sa somme, calculer $\int_a^b f(t)\,dt$

2.4.2 Soit $f_n(x) = \frac{1}{n^2+n^4x^2}$.

Montrer que la série converge normalement sur $[0,+\infty[$.

Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f_n(x)$ dx converge vers une valeur u_n que l'on calculera.

Montrer que la série de t.g. u_n est convergente, et que l'on peut intervertir les sommes :

$\int_0^{+\infty} \Sigma_1^{+\infty} f_n(x)\,dx = \Sigma_1^{+\infty} u_n$.

2.5 Dérivation terme à terme de la somme d'une série.

2.5.1 Étudier la convergence et la dérivabilité des séries de fonctions.

(1) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ (-1)^k \frac{1}{x+k}$

(2) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{e^{-nx^2}}{1+n^2}$
(3) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin nx}{n^3}$

2.5.2 Dans chaque exemple, montrer que la série de t.g. u_n converge vers une fonction f de classe C^1.

(1) sur $]0, +\infty[$, $u_n(x) = e^{-\mathrm{nx}} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$
(2) sur $]0, +\infty[$, $u_n(x) = \frac{x^n}{n^3(1+x^n)}$
(3) sur $]-1, +\infty[$ $u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$. Trouver $f'(1)$
(4) sur $]-1, +1[$ $u_n(x) = \frac{x^n}{n} \sin(nx)$. Calculer f' et en déduire f. Montrer que cette série converge aussi uniformément sur $[-1, 1]$

2.6 La fonction ζ.

Pour $x > 1$ on définit $\zeta(x)$ comme somme de la série de t.g. $\frac{1}{n^x}$

(1) Montrer, en comparant la série et une intégrale que $\zeta(x) \sim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$

(2) Montrer que, si $a > 1$, la série converge normalement sur $[a, +\infty[$ et montrer que $\lim_{x \to \infty} \zeta(x) = 1$

(3) Montrer que ζ est de classe C^∞ et exprimer $\zeta^{[k]}$ comme somme d'une série.

(4) Soit $g(x)$ la somme de la série de t.g. $\frac{(-1)^n}{n^x}$. Montrer que g est continue sur $]0, \infty[$.

(5) Montrer que $g(x) = \zeta(x)(1 - \frac{1}{2^{x-1}})$ pour $x > 1$ et calculer $g(1)$.

(6) Montrer que $\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1)\, dx = \sum_2^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$.

(7) Montrer que $\zeta(k+1) = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{1-t} \mathrm{dt}$ pour $k \geqslant 1$.

3 Séries entières.

3.1 Développer en série entière.

3.1.1 Développer en série entière les fonctions suivantes et, si possible, déterminer le rayon de convergence de la série obtenue:

(1) $f(x) = \frac{1}{3 - 4x + x^2}$

(2) $f(x) = \sin x^2 + 1/4 \cos x^3 + \mathrm{ch}\, x \sin x$

(3) $f(x) = \arcsin x$

(4) $f(x) = \frac{1}{1 - 2\cos\alpha + x^2}$

(5) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(6) $f(x) = \mathrm{arct} \frac{1-t^2}{1+t^2}$

(7) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

3.1.2 Faire un DSE de :

(1) $\sqrt{x}$ au voisinage de $x = 3$; rayon de convergence de la série obtenue ?
(2) $\ln(x)$ au voisinage de $x = 7$; rayon de convergence de la série obtenue ?
(3) $\sqrt{x^3}$ au voisinage de $x = 5$; rayon de convergence de la série obtenue ?
(4) $\mathrm{sh}\, x$ au voisinage de $x = -3$; rayon de convergence de la série obtenue ?
(5) x^α au voisinage de x=4 ; rayon de convergence de la série obtenue ?

3.1.3 Soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0, et soit R le rayon de convergence de cette série.

a) Montrer que si f est impaire, la fonction $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est DSE, et calculer le rayon de convergence de la série.

b) Montrer que si f est paire, il existe une fonction g DSE avec le même rayon de convergence et telle que $f(x) = g(x^2)$

c) Montrer qu'il existe une fonction DSE de rayon de convergence infini g telle que $\frac{\mathrm{sh}\, x}{x} = g(x^2)$.

d) Soient f, g deux fonctions développables en série entière au voisinage de 0. On suppose que la limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe. Montrer que $\frac{f}{g}$ est developpable en série entière au voisinage de 0 et que le rayon de convergence de la série est supérieur ou égal au minimum des deux rayons de convergence des séries entière de f et g.

3.1.4 Développer en série entière la fonction $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x}$ au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de la série obtenue ?

3.2 Étudier une fonction DSE

3.2.1 On donne les séries entières.

$$A(x) = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right) + \left(\frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{9}\right) \ldots + \left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1} - \frac{x^{3n+2}}{3n+2}\right) + \ldots$$

$$B(x) = 1 - x + x^3 - x^4 + \ldots + x^{3n} - x^{3n+1} + \ldots$$

a) Chercher le rayon de convergence R de ces deux séries, et déterminer le comportement aux bornes de l'intervalle $]-R, R[$.

b) Démontrer que la somme de B est une fraction rationnelle et en déduire une expression $A(x) = k\,\mathrm{Arctg}\, f(x)$, ou f est une fonction que l'on calculera.

c) Soit $A_{2n} = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right) + \frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{9} \ldots + \frac{x^{3n+1}}{3n+1} - \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$. Majorer $A - A_{2n}$ sur $[0, R[$ et $]-R, 0]$.

d) En déduire que A converge uniformément sur $[-R, R]$ et calculer $A(-R)$ et $A(R)$

3.2.2 Soit $f(u) = au^2 + bu + c$ un polynôme de degré $\leqslant 2$. On pose $u_n(x) = \frac{f(n)}{n(n+1)(n+2)} x^2$

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de t.g. u_n.

b) Montrer qu'il existe deux polynômes $h(x), k(x)$ de degré $\leqslant 2$ tels que sur $]-1,1[$ on ait :

$\Sigma_0^{+\infty} u_n(x) = \frac{h(x)\ln(1-x) + k(x)}{x^3}$

3.3 Sommation d'une série entière

3.3.1 Rayon de convergence et somme des séries entière de t.g.

$n^3 z^n$, $\frac{2^n}{n!} z^n$, $\frac{2^n}{n^2} z^n$, $\frac{n^3+2n+1}{n!} z^n$

3.3.2 On considère l'équation différentielle :

$2xy'' + y' - y = 0$

a) chercher une solution de cette équation qui soit developpable en série entière , $y(x) = 1 + \sum_1^\infty a_n x^n$.

b) Calculer le rayon de convergence de cette série. Sommer la série.

4 Séries de Fourier

4.1 Développements en série de Fourier.

4.1.1 Développer les fonctions suivantes en série de Fourier, et étudier la convergence de la série trigonométrique obtenue.

(1) $f : [-\pi, , \pi] \to R$ $f(x) = |\sin x|$

(2) $f : [-\pi, , \pi] \to R$ $f(x) = |\cos x|$

(3) $f : [-\pi, , \pi] \to R$ $f(x) = 1 \,\mathrm{si}\, x \geqslant 0, \mathrm{et}\, f(x) = 0 \,\mathrm{si}\, x < 0$

(4) $f : [-\pi, , \pi] \to R$ $f(x) = x^2$

(5) $f : [0, 2\pi] \to R$ $f(x) = e^{ax}$. En déduire les sommes des séries $\sum \frac{a \cos nx}{a^2 + n^2}$

(6) $f(x)$ est impaire 2 périodique et $f(x) = x(1-x)$ si $x \in [0,1]$. En déduire $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

4.2 Étude d'une fonction définie par sa série de Fourier.

4.2.1 Soit $f(x)$ la somme de la série de t.g $\frac{\sin n! x}{n!}$. montrer que f est continue sur R, 2π périodique mais que f n'est pas de classe C^1. Quels sont les coefficients de Fourier de f

4.2.2 Soit $e_n(x) = \exp(inx)$. Montrer que $\Sigma_n^m e_k(x) = \exp(inx) \frac{\exp(i(m-n+1)x) - 1}{\exp(ix) - 1}$

En utilisant la règle d'Abel, que l'on rappellera, en déduire que si a_n est une suite de nombre réels, décroissante et qui tend vers 0, la série $\Sigma_0^n a_k \exp(ikx)$ converge sur $]0, 2\pi[$ vers une fonction, et que cette convergence est uniforme sur tout compact $[a,b]$ contenu dans cet intervalle.

Montrer que si a_n et b_n sont deux suites décroissantes et qui tendent vers 0 la série de t.g. $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ converge pour $x \neq 2k\pi$ et que cette convergence est uniforme sur tout intervalle $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$.

4.3 Formule de Parseval

4.3.1 Montrer qu'il n'existe pas de fonction 2π périodique, continue par morceaux, t.q. sa série de Fourier soit $\Sigma_1^\infty \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$

4.3.2 Soit f une fonction de classe C^1 $2\pi -$ périodique, et telle que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Montrer que $(\int_0^{2\pi} f(t)^2 \frac{dt}{2\pi})^{1/2} \leqslant \int_0^{2\pi} f'(t)^2 \frac{dt}{2\pi})^{1/2}$, et qu'il y a égalité si et seulement si $f(t) = C \exp 2i\pi t + C' \exp - 2i\pi t$

4.4 * Polynômes de Bernoulli.

Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes B_n tels que

$B_0(t) = 1$

$(*) \quad B_n' = nB_{n-1}$

$\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{dt} = 0$ si $n \geqslant 1$

Calculer B_1, B_2.

Vérifier que B_i est un polynôme de degré i

On pose $b_i = B_i(0)$ Montrer que

$B_p(x) = \sum_0^p \binom{p}{m} b_m x^{p-m}$

$B_p(1-x) = (-1)^p B_p(x)$

$b_i \in \mathbb{Q}$

On considère la fonction $1-$ périodique $\tilde{B}_p = B_p(x - E(x))$.

En utilisant la formule $(*)$, montrer que le n-ième coefficient de Fourier de $\tilde{B}_p$ est $c_n(p) = -\frac{p!}{(2i\pi)^p}$ si $p \neq 0$, et $c_0(p) = 0$ si $p \geqslant 1$

En déduire que $B_{2k}(x) = \frac{(-1)^{k+1} 2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \Sigma_1^{+\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{n^{2k}}$

$B_{2k+1}(x) = \frac{(-1)^{k+1} 2(2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}} \Sigma_1^{+\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n^{2k+1}}$

Montrer que les nombres $\frac{\Sigma_1^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}}{\pi^{2k}}$ et $\frac{\Sigma_1^{+\infty} \frac{(-1)}{n^{2k}}}{\pi^{2k}}$ sont des nombres rationnels, et les expliciter.