Actions hamiltoniennes

THOMAS DELZANT [1] ET CHRISTOPHE WACHEUX [2]

Il y a environ 25 ans, des interactions fortes sont apparues entre deux parties fort éloignées des mathématiques : la théorie des actions de groupes en mécanique classique (hamiltonienne) et la partie de la géométrie algébrique liée à la théorie des représentations (variétés de drapeaux, variétés toriques etc). Un problème particulier avait alors attiré l'attention de plusieurs mécaniciens : celui de la classification des actions hamiltoniennes *complètement intégrables* des groupes de Lie compacts ; simultanément, les géomètres algébristes s'intéressaient à la classification des *variétés sphériques* ; il se trouve qu'après de nombreux efforts, en particuliers ceux de Brion, Luna, Knop, Woodward et Losev (et un peu aussi ceux de l'un des auteurs de ce texte), il est apparu que la clef du premier problème se trouvait dans la solution du second.

Sans prétendre à entrer dans trop de détail, le but du présent cours est d'introduire aux outils de cette étude (application moment, quotient symplectique, stratification, théorème d'Atiyah Guillemin-Sternberg et de Kirwan). En aucun cas, le lecteur ne doit s'attendre à y trouver un résultat nouveau.

1. Un peu de géométrie symplectique.

Nous fixons ici quelques notations et des "rappels" ; le livre [McD-Sal] est une référence complète, à laquelle nous renvoyons pour les démonstrations omises. Sauf mention explicite, les espaces vectoriel considérés sont toujours réels, les groupes de Lie sont réels et connexes.

1.1. Espaces vectoriels, orthogonalité.

Définition 1.1. *Un espace vectoriel symplectique* (E, ω) *est un espace vectoriel* E *équipé d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée* ω*. Un espace vectoriel symplectique est de dimension paire, nous la noterons* $2n$*.*

Soit $e_1, \ldots, e_{2n}$ une base de E et $e^1, \ldots, e^{2n}$ la base duale. Si ω est une forme symplectique et $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$ sa matrice, on a $\omega = \sum_{i,j=1}^{2n} \omega_{ij} e^i \wedge e^j$. L'inverse de la matrice ω_{ij} est notée ω^{ij}.

La structure symplectique définit deux homomorphismes, appelés homomorphismes *musicaux* :

$$\flat : E \to E^* \quad \text{et} \quad \sharp : E^* \to E$$

Si $x = \sum x^i e_i$ est un vecteur, $\flat(x) = \sum x^i \omega_{ij} e^j$.

Si η est une forme linéaire $\sharp(\eta) = \sum \eta_j \omega^{ij} e_j$.

Définition 1.2. *On dit que deux vecteurs* x, y *de* E *sont* orthogonaux *si* $\omega(x, y) = 0$*. Si* F *est un sous-espace vectoriel de* E*, nous noterons* $F^\perp$ *son orthogonal qui est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de* F*.*

Les homomorphismes musicaux transforment les orthogonaux au sens symplectique en orthogonaux au sens de la dualité. En particulier :

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E \; ; \; (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \; ; \; (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

Définition 1.3. *Un sous-espace vectoriel est dit isotrope, lagrangien ou co-isotrope, si il est contenu, égal ou s'il contient son orthogonal.*

[1] : Thomas Delzant, Institut de Recherche Mathématique Avancée, UMR 7501 Université de Strasbourg et CNRS 7 rue René Descartes, 67000 Strasbourg, France

[2] : Christophe Wacheux, Institut de Recherche Mathématiques de Rennes (IRMAR), UMR 6625 Université Rennes 1 et CNRS, 263 Avenue du Général Leclerc CS 74205 35042 Rennes, France

Une base $(e_1, \dots e_n; f_1, \dots f_n)$ de E est dite *canonique* si

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0; \omega(e_i, f_j) = \delta_i^j$$

Pour une telle base, la structure symplectique identifie $f_1, \dots f_n$ à la base duale de $e_1, \dots e_n$ (exemple (2) ci-dessous) ; c'est pourquoi, très souvent, une base canonique d'un espace vectoriel symplectique est notée, $e_1, \dots e_n, f^1, \dots\dots f^n$, et les coordonnées canoniques $q^1, \dots q^n, p_1 \dots p_n$.

Exemples :

(1) Si V est un espace vectoriel complexe muni d'une structure hermitienne, ou même semi-hermitienne $< .,. >$, la partie imaginaire du produit hermitien $< .,. >$ munit V - vu comme espace réel - d'une structure symplectique. Si $e_1, \dots e_n$ est une base orthonormée de E , alors $e_1, \dots .e_n, ie_1, \dots .ie_n$ est une base canonique. Réciproquement la donnée d'une base canonique définit une structure complexe.

(2) Soit V un espace vectoriel ; alors $E = V \oplus V^*$ est muni d'une structure symplectique dite canonique : c'est l'unique structure pour laquelle, si $e_1, \dots, e_n$ est une base de V et si $f^1, \dots, f^n$ la base duale, alors $e_1, \dots e_n, f^1, \dots\dots f^n$ est une base canonique. Si de plus V est euclidien, et si $e_1, \dots, e_n$ est une base orthonormée de V, alors E devient un espace hermitien.

1.2. Le groupe symplectique.

Soit E un espace vectoriel symplectique. Le groupe symplectique de E est le groupe des transformations linéaires qui conservent la forme symplectique. Après choix d'une base canonique, il s'identifie au groupe :

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) |\ {}^tMJM = J\}\ ,\ J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id}_n \\ \mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$$

Soit V un espace vectoriel hermitien de dimension n, de produit scalaire $< .,. >$, soit E le sous-espace vectoriel réel sous jacent ($dim(E) = 2\dim V$), et soit I la structure complexe (c'est à dire la multiplication par i). Le tenseur $g = \Re e <,>$ est une structure euclidienne sur E, et $\omega = \Im m(<,>)$ est une structure symplectique.

Le groupe symplectique est un sous-groupe groupe algébrique réel du groupe linéaire stable par transposition. Un théorème bien connu de Chevalley sur les sous-groupes algébriques de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ stables par transposition nous donne :

Proposition 1.1. *Tout sous-groupe compact maximalde $Sp(2n, \mathbb{R})$ est conjugué à*

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \cap O(2n, \mathbb{R}) = U(n, \mathbb{R})$$

.

1.3. Variétés symplectiques.

Une **variété symplectique** est une variété $\mathcal{C}^\infty$ munie d'une 2-forme différentielle *fermée* qui en tout point définit une structure symplectique sur l'espace tangent.

Exemples :

- $\mathbb{R}^{2n}$, muni de la structure "plate" $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i$; les coordonnées sont dites canoniques.
- Soit L une variété $\mathcal{C}^\infty$. Le fibré cotangent T^*L admet une forme canonique λ appelée forme de Liouville que l'on peut définir ainsi : soit $q^1, \dots, q^n$ un système de coordonnées locales sur L, de sorte que $dq^1, \dots, dq^n$ forment en tout point q une base de T_qL, soient $p_1, \dots, p_n$ les coordonnées linéaires duales sur T^*L. Un calcul facile montre que $\lambda = \Sigma p_i dq^i$ et $d\lambda$ est donc la forme plate dans ce système de coordonnées. On vérifie que λ ne dépend pas du système de coordonnées choisi.

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est un espace homogène sous l'action du groupe unitaire $U(n+1,\mathbb{R})$. Il existe -à homothétie près- une unique métrique hermitienne invariante sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$; sa partie imaginaire est une forme fermée, elle définit une structure symplectique ω.
  Si $(z_0 : z_1 : .. : z_n)$ est un système de coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ on peut la calculer :
$$\omega = \sum_{i=0}^{n} \frac{dz_i \wedge d\overline{z}_i}{\sum_{i=0}^{n} z_i \overline{z}_i}$$

Les systèmes de coordonnées locales des exemples ci-dessus sont canoniques au sens où le système de coordonnées induit sur l'espace tangent en chaque point est canonique au sens de la définition du 1.1.

On voit également qu'une variété complexe projective et lisse est donc une variété symplectique.

Théorème 1.2 (Lemme de Darboux). *Toute variété symplectique admet un atlas de coordonnées canoniques.*

Ou si l'on préfère, tout point admet un voisinage symplectiquement isomorphe à un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$. Ce lemme admet une version équivariante pour l'action d'un groupe de Lie compact.

Théorème 1.3 (Lemme de Darboux équivariant). *Si K est un groupe de Lie compact qui agit sur une variété symplectique en conservant la forme symplectique, tout point fixe admet un voisinage symplectiquement isomorphe à un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ par un isomorphisme équivariant pour l'action linéairisée de K au voisinage du point considéré.*

1.4. Crochet de Poisson.

Rappelons la définition de la dérivée de Lie, et la formule de Cartan.

Soit X un champ de vecteurs sur une variété $\mathcal{C}^\infty$, φ_t son flot, et ω une forme différentielle (dans notre cas ω est une forme symplectique, même si ces formules sont vraies en toute généralité).

Définition 1.4. *La dérivée de Lie de ω selon X est : $L_X\omega = \frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega\big|_{t=0}$*

La formule de Cartan nous dit que :
$$L_X\omega = i_X d\omega + di_X\omega.$$

Aussi, si ω est une forme fermée, et si le flot de X préserve ω, la formule de Cartan montre que $i_X\omega$ est fermée. Si ω est symplectique on dit que X est *localement hamiltonien*. Si de plus $i_X\omega$ est exacte, on dit que X est un champ de vecteurs hamiltonien ; il existe alors une fonction H telle que $i_X\omega = -dH$; on appelle H "le" hamiltonien de X, qui est bien défini à une constante près. Réciproquement une fonction H définit un champ de vecteurs hamiltonien $X_H = {}^\sharp dH$.

Les crochets de Lie de champ de vecteurs localement hamiltoniens sont hamiltonien. En fait on a même le :

Théorème 1.4. *Soient X, Y deux champs de vecteurs qui conservent la forme symplectique. Alors $[X,Y]$ est un champ hamiltonien, qui admet $\omega(X,Y)$ comme hamiltonien.*

L'un des outils majeurs de la théorie des actions de groupes de Lie en géométrie symplectique est le *crochet de Poisson*. Son existence induit une *structure algébrique* sur l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique (une structure d'*algèbre de Lie compatible à la multiplication*) qui est au coeur de bien des résultats connus.

Définition 1.5. *Soient f, g deux fonctions sur une variété symplectique (M,ω). Le crochet de Poisson de f, g, noté $\{f,g\}$ est défini par :*
$$\{f,g\} = \omega(X_f, X_g) = X_f.g = -X_g.f.$$

En coordonnées canoniques, on retrouve la formule originale de Poisson :
$$\{f,g\} = \Sigma_i \partial_{p_i} f \partial_{q^i} g - \partial_{p_i} g \partial_{q^i} f$$

Théorème 1.5. *Le crochet de Poisson munit l'algèbre des fonctions sur M d'une structure d'algèbre de Lie compatible avec la multiplication :*

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$$

Pour cette structure, l'application $f \to X_f$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

La "dualité de Hilbert" entre l'algèbre des fonctions sur un espace et cet espace lui même, qui apparait comme ensemble des idéaux maximaux de cet algèbre va prendre dans ce contexte une allure particulière : l'application moment.

2. L'application moment.

Dans tout ce paragraphe on fixe une variété symplectique (M, ω). On veut étudier les actions de groupes de Lie dans M qui conservent ω. Si un groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ agit sur une variété $\mathcal{C}^\infty$, on dispose alors d'un homomorphisme d'algèbres de Lie :

$$\alpha : \mathcal{G} \to X(M)$$

Nous allons étudier de plus près cette application dans notre cas, où M est équipée d'une forme symplectique et l'action est symplectique (c'est-à-dire que G conserve la forme symplectique).

2.1. Action hamiltonienne, et fortement hamiltonienne

La définition de l'application moment est due à J.-M. Souriau.

Définition 2.1. *On dit que l'action de G dans (M, ω) est* hamiltonienne*, si l'application α ci-dessus se relève en un homomorphisme d'algèbres de Lie : $\eta : \mathcal{G} \to C^\infty(M)$. L'application* moment *associée est l'application J définie par*

$$J : M \to \mathcal{G}^\star$$
$$p \to \mathrm{ev}_p \circ \eta$$

Autrement dit $< J(p), X >= H_X(p)$ où H_X est le hamiltonien de X donné par le relèvement η: $H_X = \eta(X)$.

Notons que l'application η (et donc l'application J) est bien définie à une forme linéaire ξ près sur $\mathcal{G}$. On trouvera dans le livre de Souriau [Sou] une démonstration de la :

Proposition 2.1. *L'application J est équivariante pour une action affine de G sur $\mathcal{G}^\star$ dont la partie linéaire est $\mathrm{Ad}^\star$.*

Si on peut choisir η de sorte que J soit $\mathrm{Ad}^\star$ équivariante, on dit que l'action est *fortement hamiltonienne* : pour nous, ce sera toujours le cas dans la suite car nous nous interesserons à l'action de groupes de Lie *compacts* : l'action affine d'un groupe de Lie compact dans $\mathcal{G}^\star$ fixe un point η_0 ,$\eta - \eta_0$ est un autre relèvement de η et $J - \eta_0$ est alors une application moment équivariante.

Dans le livre de Souriau, on peut trouver également une étude du cas non équivariant et ses applications à la mécanique classique et quantique. Dans le cas du groupe de Galilée opérant dans l'espace des phases de l'espace-temps, l'obstruction à l'équivariance (une classe de cohomologie) s'interprète comme la masse inerte de l'objet étudié.

2.2. Exemples.

2.2.1. Actions linéaires du cercle.

Pour nous l'exemple le plus important est celui du cercle agissant linéairement dans un espace vectoriel hermitien. Soit $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ agissant unitairement dans un espace vectoriel ; on sait qu'il existe des nombres entiers $a_1, \ldots, a_n$ et une base orthonormée de notre espace telle que l'action s'écrive :

$$e^{2i\pi\theta}(z_1,\ldots,z_n) = (e^{2i\pi a_1\theta}z_1,\ldots e^{2i\pi a_n\theta}z_n)$$

Un calcul simple montre que “le” hamiltonien de l'action du champ ∂_θ est

$$H(z_1,\ldots,z_n) = a_1|z_1|^2 + \ldots + a_n|z_n|^2$$

2.2.2. **Actions linéaires du tore.**

Cet exemple se généralise facilement au cas du tore $\mathbb{T}^d$. Si $\mathbf{t}$ désigne son algèbre de Lie, $\mathbf{t}$ contient un réseau $\mathbb{Z}^d$, dont le réseau dual $\Lambda \subset \mathbf{t}^*$ est appelé le réseau des poids. Une représentation unitaire de dimension 1 de $\mathbb{T}^d$ est de la forme $e^{2i\pi<\theta,\xi>}z$, où ξ est justement le poids de cette représentation. Le moment de cette action est

$$J(z) = \xi|z|^2$$

Plus généralement si un tore agit dans un espace de dimension n, celui-ci se décompose en d droites invariantes de poids $\xi_1,\ldots,\xi_d$ et on peut calculer :

$$J(z_1,\ldots,z_n) = \xi_1|z_1|^2 + \ldots + \xi_d|z_d|^2$$

2.2.3. **Action standard du groupe unitaire.**

Le groupe unitaire $U(n)$ agit linéairement dans $\mathbb{C}^n$ en conservant la forme hermitienne. Un calcul simple montre que l'application moment est $J(z) = z.z^* = (z_i\overline{z_j})$ avec z^* la forme linéaire $(\overline{z_1},\ldots,\overline{z_n})$. C'est une matrice hermitienne.

Preuve : Pour le sous-groupe diagonal de $U(n)$, cela résulte de 2.2.2. On obtient le cas général par équivariance. □

2.3. Application moment et stratification.

Nous supposons que le groupe de Lie compact G agit de façon fortement hamiltonienne dans la variété symplectique M.

Théorème 2.2. *Soit $p \in M$. L'orbite O_p de p sous l'action de G est une sous-variété immergée. Son espace tangent est l'orthogonal symplectique du noyau de T_pJ.*

$$(T_pJ)^\perp = T_pO_p$$

Preuve : En effet, T_pO_p est exactement l'ensemble des valeurs des champs fondamentaux au point x, c'est à dire $\mathrm{Im}(T_pJ)^t$.

□

Cette formule, à peu près évidente, est d'une importance *cruciale* car elle va nous dire que la stratification de M par l'action de G coïncide avec celle définie par le rang de J. Rappelons que, si un groupe de Lie compact agit sur une variété $\mathcal{C}^\infty$, celle-ci acquiert une stratification $\emptyset = M_{-1} \subseteq M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_d = M$ telle que pour tout i , M_i est compact, $M_i\backslash M_{i-1}$ est une sous-variété de dimension i (éventuellement vide) formée des points dont le stabilisateur est de dimension $\dim G - i$, ou si l'on préfère dont l'orbite est de dimension i.

On a donc :

Corollaire 2.3. *La stratification de M sous l'action de G coïncide avec celle par le rang de l'application moment.*

C'est là tout le secret de l'étude des actions hamiltoniennes des groupes de Lie compacts : pour les actions quelconques des groupes de Lie compacts, la stratification est extrèmement compliquée, mais pour les actions hamiltoniennes, on peut l'étudier grâce à l'application moment.

Ainsi, en notant que l'ensemble des point fixes d'une action linéaire et hermitienne d'un groupe compact est toujours un sous-espace vectoriel complexe, et donc de dimension réelle paire, on obtient :

Corollaire 2.4. *Les strates (ouvertes) non-vides de la stratification sont des variétés symplectiques (donc de de dimension paire).*

2.4. Structure symplectique sur les orbites co-adjointes.

Théorème 2.5 (Souriau)**.** *Soit G un groupe de Lie, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie, et $\mathcal{G}^*$ son dual, et μ un point de $\mathcal{G}^*$. Il existe une unique structure symplectique sur l'orbite co-adjointe de μ pour laquelle l'identité est l'application moment.*

Preuve : Le groupe d'isotropie de μ est $G_\mu := \{g \in G | Ad^*_g \mu = \mu\}$, son algèbre de Lie est $\mathcal{G}_\mu := \{X \in \mathcal{G} | ad^*_X \mu = 0\}$. Nous noterons $\mathcal{O}_\mu$ son orbite co-adjointe. L'espace tangent en μ à $\mathcal{O}_\mu$ se calcule facilement

$$T_\mu \mathcal{O}_\mu = \{ad^*_X \mu, X \in \mathcal{G}\}, \text{ de sorte que } T_\mu \mathcal{O}_\mu \cong \mathcal{G}_\mu^\perp \simeq \mathcal{G}/\mathcal{G}_\mu.$$

On munit $T_\mu \mathcal{O}_\mu$ de la 2-forme

$$\omega_\mu(X,Y) := \langle [X,Y], \mu \rangle = \langle Y, ad^*_X \mu \rangle = -\langle X, ad^*_Y \mu \rangle$$

Il est facile de se convaincre que ω_μ est une $2-$ forme non dégénérée ; pour voir qu'elle est fermée, on la tire en arrière par la submersion canonique de G sur $\mathcal{O}_\mu$ qui à g associe $g.\mu$. On a :

$F^*\omega_\mu = d\mu$, où μ est vue comme 1-forme invariante à gauche sur G, ce qui montre que $F^*\omega_\mu$ est exacte, donc ω_μ est fermée.

□

Ce théorème permet une classification complète des espaces homogènes symplectiques des groupes de Lie semi-simples compacts.

Théorème 2.6. *Un espace homogène symplectique d'un groupe de Lie compact semi-simple est (isomorphe à) une orbite co-adjointe. Deux orbites co-adjointes sont isomorphes en tant qu'espaces homogènes symplectiques si et seulement si elle coïncident.*

Preuve : Comme G est semi-simple $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}$, donc l'action est hamiltonienne, et même fortement hamiltonienne puisque G est compact; si M est une variété symplectique homogène, $J(M)$ est homogène donc c'est une orbite co-adjointe. D'après la formule de dualité, ou d'après la stratification, le rang de J est constant, et J est donc un revêtement d'une orbite co-adjointe; mais on montre en 3.2 que les orbites co-adjointes des groupes de Lie compacts sont simplement connexes.

Pour la seconde partie, noter que pour une orbite co-adjointe, on sait que J est l'identité.

□

Remarque 2.2. *Le raisonnement ci-dessus est typique d'un résultat de classification d'action hamiltonienne. Il est valable dans un cadre plus général, quitte à modifier un peu les hypothèses et les conclusions pour un groupe de Lie quelconque (ni semi-simple, ni compact).*

2.5. Le quotient symplectique ou quotient de Marsden-Weinstein.

Une présentation de ce quotient par l'un de ses inventeurs se trouve dans [Wei] .On se place toujours sous l'hypothèse d'un groupe de Lie compact G, agissant dans une variété symplectique M avec un moment J.

Soit μ une valeur régulière de J, de sorte que $J^{-1}(\mu)$ est une sous-variété de M contenue dans la strate ouverte de la stratification, et soit G_μ son groupe d'isotropie sous l'action co-adjointe. On a le lemme suivant :

Lemme 2.7. *Le noyau de la restriction de la forme symplectique à $T_x J^{-1}(\mu)$ est l'espace tangent à l'orbite de x sous l'action de G_μ.*

Preuve : L'orthogonal symplectique de l'espace tangent $T_xJ^{-1}(\mu)$ est l'espace tangent à l'orbite de x sous l'action de G. Si $X \in \mathcal{G}$ et si X_x désigne la valeur du champ fondamental en x, pour que $X \in T_xJ^{-1}(\mu) = \ker T_xJ$, il faut et il suffit que $T_xJ(X_x)$ soit nul. Par équivariance, l'image par TJ du champ fondamental associé à X est le champ linéaire ad^*_X. Ainsi $T_xJ(X_x) = \mathrm{ad}^*_X\, J(x) = \mathrm{ad}^*_X\, \mu$ s'annule si et seulement si X est dans l'algèbre de Lie du groupe de Lie compact G_μ.

$\square$

Notons que si μ est une valeur régulière du moment, TJ est de rang maximal en chaque point de $J^{-1}(\mu)$, et par dualité, l'application $\mathcal{G} \to T_xM$ est injective en tout point de cette sous-variété, en particulier l'action de G_μ sur $J^{-1}(\mu)$ est localement libre, à groupes d'isotropie finis.

On peut alors définir le quotient symplectique ou quotient de Marsden-Weinstein de M au point μ comme étant le quotient $M_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$; il se peut que l'on obtienne une orbifold $\mathcal{C}^\infty$ plutôt qu'une variété $\mathcal{C}^\infty$, mais cela n'est pas bien grave dans les exemples. Si le groupe d'isotropie est trivial, il est facile de se convaincre que la forme symplectique restreinte à $J^{-1}(\mu)$ descend en une forme symplectique sur M_μ puisque qu'elle est invariante et que son noyau est l'espace tangent à G_μ.

La dépendence de cette variété par rapport à μ est un sujet intéressant -même dans le cas commutatif- particulièrement dans le cas ou μ varie dans l'ensemble des points fixes de la représentation co-adjointe. Sans insister sur ce sujet, il faut savoir que :

La dépendance de M_μ par rapport à μ est la même que la dépendance du quotient au sens de la théorie des invariants d'une variété projective par l'action d'un groupe réductif, qui dépend du choix d'une linéarisation du fibré ample définissant la structure projective.

2.5.1. **Exemples.**

L'espace projectif comme quotient symplectique. (Lichnérowicz).

Ici, nous établissons un lien avec la Geometric Invarant Theory. Reprenons l'exemple 2.2.2 quand tous les a_i sont égaux à 1 : $(M, \omega) = (\mathbb{C}^{n+1}, \sum_i dz_i \wedge d\overline{z_i})$, $J(z) = \sum_i |z_i|^2$; la seule valeur critique de J est 0.

- Si $\mu < 0$, $J^{-1}(\mu) = \emptyset$
- Si $\mu > 0$, $J^{-1}(\mu)$ est la sphère de rayon $\sqrt{\mu}$, et l'action du cercle définit la fibration de Hopf de cette sphère vers l'espace projectif. En coordonnées homogènes, la forme induite sur le quotient est

$$\omega_\mu = \mu \frac{\sum_i dz_i \wedge d\overline{z_i}}{\sum_i z_i \overline{z_i}}$$

Curieusement, il est intéressant de généraliser cet exemple pour étudier les quotients de $\mathbb{C}^{n+d}$ par une action du tore $\mathbb{T}^d$; le lecteur trouvera dans [Gui] une étude détaillée qui conduit à une approche symplectique de la théorie des variétés toriques.

Orbites co-adjointes. Soit G un groupe de Lie compact agissant sur lui même par translation *à gauche* ; on remonte cette action au fibré cotangent de G que l'on identifie (grâce à l'action *à droite*) à $G \times \mathcal{G}^*$. On a $g.(h, \mu) = (gh; \mathrm{Ad}^*_g \mu)$ Un calcul simple montre que $J(g, \mu) = \mu$. Ainsi l'application moment est une submersion et $J^{-1}(\mu)/G_\mu = G/G_\mu$ est l'orbite co-adjointe de μ.

3. **Convexité.**

3.1. **Exemple.**

Rappelons l'exemple 2.2.2 du tore $\mathbb{T}^n$ qui agit dans un espace vectoriel de dimension n. Celui ci se décompose en n droites invariantes de poids $\xi_1, \ldots, \xi_n$ et on a vu :

$$J(z_1, \ldots, z_n) = \xi_1 |z_1|^2 + \ldots + \xi_n |z_n|^2$$

Notons que :

L'image $J(\mathbb{S}^{2n-1})$ de la sphère unité de $\mathbb{C}^n$ n'est autre que l'enveloppe convexe des poids ξ_i.

Clairement cette action passe au quotient en une action de $\mathbb{T}^d$ sur l'espace projectif $\mathbb{S}^{2n-1}/\mathbb{S}^1$, l'action quotient est hamiltonienne et en coordonnées homogènes, on a

$$J(z_1 : z_2 : \ldots : z_n) = \frac{\xi_1|z_1|^2 + \ldots + \xi_n|z_n|^2}{\sum |z_i|^2}$$

Ainsi remarque-t-on que :

L'image du moment de l'action linéaire d'un tore sur un espace projectif est l'enveloppe convexe des poids de la représentation associée.

Notons que cette représentation est bien définie à un caractère près, et l'image du moment à une constante additive près.

3.2. **Théorie de Morse à la Bott.**

On dit qu'une fonction f est de Morse-Bott si au voisinage de tout point critique on peut trouver un système de coordonnées $x_1, \ldots, x_i, \ldots x_r, \ldots x_n$ tel que dans ce système, on ait

$$f(x) = f(p) - \Sigma_{i=1}^k x_i^2 + \Sigma_{i=k+1}^r x_i^2$$

L'entier k s'appelle *l'indice* du point considéré. Si $r = n$, on dit que la fonction est de Morse.

Proposition 3.1. *Soit f une fonction de Morse-Bott sur une variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte connexe dont tous les points critiques sont d'indice pair. Alors*

(1) *L'ensemble des points critiques d'indice 0 est connexe, son image est la valeur minimale de f.*
(2) *Si $-f$ satisfait aussi cette propriété les variétés de niveau de f sont toutes connexes.*

Preuve :
(1) En effet si cet ensemble avait deux composantes connexes, un chemin de min-max entre ces deux ensembles atteindrait son maximum sur un point critique où la trajectoire est concave par rapport à la direction du chemin, convexe par rapport aux autres directions. Il s'agit dont d'un point critique d'indice 1, cas exclu par hypothèse.
(2) Même argument en distinguant si l'on peut connecter deux c.c. d'une variété de niveau par dessus ou par dessous.

□

Proposition 3.2. *Si de plus l'ensemble des points ou f atteint son minimum est réduit à un point, alors M est simplement connexe.*

Preuve : En effet, le passage d'un point de Morse d'indice $\geqslant 2$ n'augmente pas le π_1. □

3.3. **Composantes du moment.**

Soit G un groupe de Lie compact agissant dans une variété symplectique M avec un moment J, et soit X un élément de $\mathcal{G}$, de sorte que $H =< X, J >$ est le hamiltonien de l'action du sous-groupe à un paramètre $\{\exp(tX)\}_{t\in\mathbb{R}}$ de G. Notons $\mathbb{T} \subset G$ le tore adhérence de ce sous-groupe

Lemme 3.3. *La fonction H est de Morse-Bott ; son lieu critique est l'ensemble des points fixes de $\mathbb{T}$ qui est une réunion finie de sous-variétés symplectiques compactes ; l'indice de chaque composante est pair, les variétés de niveau de H sont connexes.*

Preuve : Un point critique de H est un zéro de X donc un point fixe de $\mathbb{T}$. Grâce au lemme de Darboux équivariant, on peut linéariser l'action de ce tore, et calculer au voisinage du point considéré son moment en fonction des poids de l'action linéaire.

$$J^{\mathbb{T}} = c + \sum_{i=1}^n \xi_i|z_i|^2 \text{ d'ou l'on tire } H = H(p) + \sum_{i=1}^n \langle \xi_i, X\rangle |z_i|^2$$

ce qui implique le résultat.

□

Théorème 3.4. *Les orbites co-adjointes des groupes de Lie compactes sont simplement connexes.*

Preuve : Soit $\mu \in \mathcal{G}^*$ que l'on identifie à $\mathcal{G}$ par un produit scalaire invariant et O_μ son orbite ; on considère l'action hamiltonienne d'un tore maximal sur O_μ ; ses points fixes sont l'intersection de O_μ avec l'algèbre de Lie de ce tore. Or on sait que c'est exactement une orbite de l'action du groupe de Weyl, qui est fini. En particulier, si X est un vecteur engendrant un sous-groupe à un paramètre dense dans le tore, $< X, J >$ est une fonction de Morse (ordinaire) sur cette orbite ayant uniquement des points critique d'indice pair.

$\square$

3.4. Le théorème d'Atiyah Guillemin Sternberg

Théorème 3.5. *Soit M une variété symplectique compacte munie d'une action hamiltonienne d'un tore $\mathbb{T}$ de moment J.*
Alors : $J(M) \subset \mathcal{T}^*$ est un polytope

On pourra trouver dans [McD-Sal] une démonstration détaillée de ce théorème.
On établit ce résultat en deux temps : tout d'abord on constate la convexité de $J(M)$, ensuite on identifie les points extrémaux.

Preuve : Pour établir cette convexité, on montre que l'intersection de $J(M)$ avec presque tout hyperplan est convexe, et ce par récurrence sur $\dim M$.
Si $X \in \mathcal{G}$,posons $H =< X, J >$, de sorte que H est le hamiltonien du champ de vecteurs associé à X. Il s'agit de montrer que pour tout η l'image par J de $H^{-1}(\eta)$ est convexe. On sait déjà $H^{-1}(\eta)$ est connexe. Si X appartient au réseaux des entiers de l'algèbre de Lie du tore, l'action de ce champ sur M définit une action hamiltonienne du cercle. On considère alors le quotient symplectique $M_\eta = H^{-1}(\eta)/\mathbb{S}^1$. C'est une variété symplectique connexe munie d'une action du tore de moment J (car J est équivariant) et d'image égale à $J(H^{-1}(\eta)) = J(M_\eta)$. Elle est de dimension 2n-2, aussi, par une récurrence descendante sur la dimension, cette image est donc un polytôpe.

$\square$

Le lecteur attentif aura remarqué que ce raisonnement est un peu faux, car l'action du cercle n'est pas libre mais seulement localement libre, et que donc il faut parler d'orbifold quotient plutôt que de variété quotient, mais après reflexion, il suffit de voir que ce qui a été dit marche bien pour des orbifolds symplectiques à groupes d'isotropies finis et abéliens. Aussi il y a un petit problème dû au fait que cette démonstration ne marche que pour X dans le réseau des entiers. Pour conclure, on peut utiliser le fait que dans $\mathbb{R}^n$ les parties compactes convexes sont fermées pour la topologie de Hausdorff, l'application $c \mapsto J^{-1}(c)$ est continue.

3.4.1. Points extrémaux.

Si x_0 est un point éxtrémal de $J(M)$, nous allons montrer que $J^{-1}(x_0)$ est une sous-variété symplectique connexe qui est une composante connexe de l'ensemble des points fixes de $\mathbb{T}$. Considérons $X \in \mathfrak{t}$ de sorte que $X = X(x_0)$ soit un hyperplan d'appui strict. L'ensemble $\{p \in M | < X, J(p) >= X(x_0)$ est l'ensemble des points où la fonction de Morse Bott $< X, J >$ atteint son minimum. C'est donc d'après le paragraphe précédent une sous-variété symplectique, et elle est $\mathbb{T}$-invariante. Comme son image par J est réduite à un point, le rang de la restriction de J à cette sous-variété est 0 est elle est constituée de points fixes ; il est clair que c'est exactement une composante de cet ensemble car toute composante du lieu fixe a pour image un seul point.

3.5. Le théorème de Kirwan.

Nous l'énoncerons sans plus de démonstration.

Théorème 3.6. *Si un groupe de Lie compact connexe G admet une action hamiltonienne dans une variété symplectique compacte M de moment J, alors $J(M)$ rencontre une chambre de Weyl selon un polytope convexe.*

3.6. **Conclusion.**

Nous avons introduit ici tous les principaux outils de la classification des actions hamiltoniennes. Le premier cas, traité ci-dessus était le cas des espaces homogènes ; le cas suivant à comprendre est celui des variété complètement intégrables.

On dit que l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie compact G dans une variété symplectique M est complètement intégrable si le quotient symplectique est réduit à un point, ou si l'orbite générique (ie d'un point de la strate ouverte) est co-isotrope. Pour un tore la classification des actions complètement intégrables est simple et coïncide avce celle des variétés toriques (en gros...) ; pour un groupe de Lie compact général la situation est beaucoup plus dure ; les efforts de plusieurs auteurs (Knop [Kn], Woodward ([Woo1], [Woo2], et Losev [Los]) permettent de démontrer un théorème conjecturé dans [De] (et démontré en dimension 2 dans le même papier).

Théorème 3.7. *Les variétés symplectiques munie d'une action hamiltonienne complètement intégrable d'un groupe de Lie compact sont classées par l'image du moment et le groupe d'isotropie principal.*

Ce résultat laisse entrevoir la possibilité d'une classification plus ambitieuse, où le quotient symplectique serait de dimension positive.

Bibliography

[De] Delzant, T., *Classification des actions hamiltoniennes complètement intégrables de rang 2*, Ann. Global Anal. Geom. 8 (1990), no. 1, 87112.

[Gui] Guillemin, V., *Moment maps and combinatorial invariants of Hamiltonian* $\mathbb{T}^n$*-spaces* . -Boston : Birkhuser, 1994.

[Kn] Knop, F., Van Steirteghem, B., *Classification of smooth affine spherical varieties*, Transform. Groups 11 (2006), no.3, 495–516.

[Kn2] nop, F., *Automorphisms of multiplicity-free Hamiltonian manifolds* , arXiv:1002.4256

[Los] Losev, I., *Proof of the Knop conjecture* Annales de l'institut Fourier, 59 no.3 (2009), p. 1105-1134.

[McD-Sal] McDuff, D., Salamon, D., *Introduction to symplectic topology, 2nd edition*, Oxford University Press, 1998.

[Sou] Souriau, J.-M., *Structure of Dynamical Systems : A Symplectic View of Physics*, Springer Verlag, 1997.

[Wei] Weistein, A., *Lectures on symplectic geometry* , Providence RI : American mathematical society, 1977.

[Woo1] Woodward, C., *Spherical varieties and existence of invariant Khler structures*, Duke Math. J. 93 (1998), no. 2, 345–377.

[Woo2] Woodward, C., *Multiplicity-free Hamiltonian actions need not be Khler*, Invent. Math. 131 (1998), no. 2, 311–319.

Thomas Delzant [19] et Christophe Wacheux [2] [10]

[9] [1] : Thomas Delzant, Institut de Recherche Mathématique Avancée, UMR 7501 Université de Strasbourg et CNRS 7 rue René Descartes, 67000 Strasbourg, France

[10] [2] : Christophe Wacheux, Institut de Recherche Mathématiques de Rennes (IRMAR), UMR 6625 Université Rennes 1 et CNRS, 263 Avenue du Général Leclerc CS 74205 35042 Rennes, France