UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR STRASBOURG

année 2004-2005

Licence de mathématiques, Topologie

V. Blanlœil, T. Delzant, S. Maillot

Références bibliographiques : Choquet, Flory, Kolmogorov, Queffélec, Skandalis.

Les $^{(\star)}$ en début d'exercice ou de question indiquent une difficulté.

1 - Ensembles, applications -

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On rappelle les définitions et notations suivantes :

Si $y \in F$, un *antécédent* de y, c'est un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On dit que f est *surjective* si tout élément de F admet au moins un antécédent. On dit que f est *injective* si tout élément de F admet au plus un antécédent. On dit que f est *bijective* si elle est injective et surjective.

Si A est une partie de E, l'*image* de A (par f) est l'ensemble des images des éléments de A, c'est-à-dire $\{f(x) \mid x \in A\}$. On note $f(A)$ l'image de A.

Si B est une partie de F, l'*image réciproque* de B (par f) est l'ensemble des antécédents des éléments de B, c'est-à-dire $\{x \in E \mid f(x) \in B\}$. On note $f^{-1}(B)$ l'image réciproque de B.

Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble des $x \in E$ qui n'appartiennent pas à A. Il est noté $\complement_E A$

Le *produit cartésien* de E et de F est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$.

Exercice : 1 Soient A_1 et A_2 deux parties de E, B_1 et B_2 deux parties de F. Démontrer les affirmations suivantes :

1. $\complement_E(A_1 \cup A_2) = \Big(\complement_E A_1\Big) \cap \Big(\complement_E A_2\Big)$
   $\complement_E(A_1 \cap A_2) = \Big(\complement_E A_1\Big) \cup \Big(\complement_E A_2\Big)$
2. $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$
   $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subset (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$
   $\complement_{E\times F}\Big(A_1 \times B_1\Big) = \Big((\complement_E A_1) \times F\Big) \cup \Big(E \times (\complement_F B_1)\Big)$

EXERCICE : 2 Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$. Décrire les ensembles suivants :

1. $f^{-1}\Big(\{1\}\Big)$
2. $f^{-1}\Big(]0,1]\Big)$
3. $f([0,1] \times \{1\})$

EXERCICE : 3 Mêmes notations qu'à l'exercice 1. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que :

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
   $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
   Existe-t-il une relation entre $f(\complement_E A_1)$ et $\complement_F\Big(f(A_1)\Big)$?
2. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
   $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
   $f^{-1}\Big(\complement_F B_1\Big) = \complement_E\Big(f^{-1}(B_1)\Big)$
3. $f\Big(f^{-1}(B_1)\Big) \subset B_1$ avec égalité si f est surjective.
   $f^{-1}\Big(f(A_1)\Big) \supset A_1$ avec égalité si f est injective.

2 - DÉNOMBRABILITÉ -

On rappelle que deux ensembles X et Y sont dits *équipotents* s'il existe une bijection de X sur Y. Un ensemble est *dénombrable* s'il est équipotent à $\mathbf{N}$.

EXERCICE : 4 Montrer que $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$ sont dénombrables.
Indication : pour $\mathbf{Q}$, on pourra donner une bijection entre $\mathbf{Q}$ et une partie de $\mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ et utiliser le fait qu'une partie d'un ensemble dénombrable est soit dénombrable, soit finie.

EXERCICE : 5 Montrer que $]1,+\infty[$ et $]0,1[$ sont équipotents à $\mathbf{R}$.

EXERCICE : 6 Si X est un ensemble quelconque, montrer que X et $\mathcal{P}(X)$ ne sont pas équipotents.
Indication : on raisonne par l'absurde. Soit $f : X \to \mathcal{P}(X)$ une bijection ; considérer l'ensemble $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$.

EXERCICE : 7 Montrer que $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.
Indication : d'après un exercice ci-dessus, il revient au même de démontrer que $]0,1[$ n'est pas dénombrable. On raisonne par l'absurde en considérant une bijection $f : \mathbf{N} \to]0,1[$ et les développements décimaux des $f(n)$ pour $n \in \mathbf{N}$.

3 - Espaces métriques -

3.1 - Espaces métriques : notions de base -

Exercice : 8 Les fonctions suivantes de $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définissent-elles des métriques sur $\mathbf{R}$?

a- $f(x,y) = |x^2 - y^2|$
b- $f(x,y) = |x^3 - y^3|$
c- $f(x,y) = e^{|x-y|}$

Exercice : 9 a) On considère $\mathbf{R}$ avec la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$. Si $a \in \mathbf{R}$ et $r > 0$, décrire et dessiner la boule fermée de centre a et de rayon r.

b) Même exercice en remplaçant $\mathbf{R}$ par $\mathbf{R}^2$ et d par les distances vues en cours, à savoir :

1. La distance euclidienne $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$, où $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$.
2. $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.
3. $d_\infty(x,y) = \sup\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$.

Exercice : 10 Soit X un ensemble. On définit une distance d sur X (appelée *distance discrète*) en posant

$$\forall (x,y) \in X \ d(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ si } x = y \end{cases}$$

a) Vérifier rapidement que c'est bien une distance.

b) Soit $x \in X$. Décrire la boule ouverte de centre x et de rayon 1, puis la boule ouverte de centre x et de rayon $1/2$.

c) Même question en remplaçant "boule ouverte" par "boule fermée".

b') et c') Répondre aux questions b) et c) lorsque X est le segment $[0;1]$ (muni de la métrique induite par la métrique usuelle sur $\mathbf{R}$.)

Exercice : 11 Révisions sur les bornes inférieures et supérieures

a) Soit A une partie de $\mathbf{R}$. Rappeler la définition de la borne inférieure de A, notée $\inf A$.

b) Donner trois exemples : un où la borne inférieure est atteinte, un où elle existe sans être atteinte, et un où elle n'existe pas.

c) Reprendre a) et b) avec la borne *supérieure* $\sup A$.

d) Déterminer $\inf_{n \in \mathbf{N}^*} 1/n$ et $\sup_{n \in \mathbf{N}^*} 1/n$. (Faire les démonstrations.)

Exercice : 12 Distance à une partie d'un espace métrique

Soit (E,d) un espace métrique et A une partie non vide de E. Pour tout x dans E on appelle *distance de x à A*, notée $d(x,A)$, le nombre $\inf_{y \in A} d(x,y)$.

a) Montrer que l'application de E dans $\mathbf{R}$ qui à x associe $d(x,A)$ est bien définie, et s'annule sur A.

b) On note B l'ensemble des points $x \in E$ tels que $d(x,A) = 0$. Montrer que B est égal à l'adhérence de A.

(Pour s'échauffer, on peut commencer par montrer que A est fermé si et seulement si $A = B$.)

EXERCICE : 13 Soit (E, d) un espace métrique.

a) Montrer que toute boule fermée est fermée, et que toute sphère est fermée.

b) En déduire que l'adhérence d'une boule ouverte est incluse dans la boule fermée de même rayon.

c) Cette inclusion peut-elle être stricte ?

Indication : la réponse à la question c) se trouve dans un des exercices précédents.

EXERCICE : 14 Étant donnés deux points P et Q du plan $\mathbf{R}^2$, on note PQ la distance euclidienne usuelle entre ces deux points. On pose $d(P,Q) = PQ$ si les points P et Q sont alignés avec l'origine O de $\mathbf{R}^2$, et $d(P,Q) = OP + OQ$ sinon.

a- Montrer que d est une distance sur $\mathbf{R}^2$. Dans la suite on suppose $\mathbf{R^2}$ muni de la topologie associée à cette distance.

b- Soit $H = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 ; y > 0\}$, déterminer $\overline{H}$.

c- Quelle est la topologie induite par d sur le cercle unité ?

d- Les homothéties de centre O sont-elle continue ? les rotations de centre O ? et les translations ?

EXERCICE : 15 Soit X un ensemble et $d : X \times X \to \mathbf{R}$ une application telle que pour tout $(x,y,z) \in X^3$ on ait :

-$d(x, y \geq 0$ et $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

-$d(x,y) = d(y,x)$;

-$d(x,z) \leq max(d(x,y), d(y,z))$.

a- Montrer que d est une distance sur X.

b- Montrer que dans (X,d) tout triangle est isocèle.

c- Montrer que dans (X,d) tout point d'une boule est centre de cette boule.

d- Montrer que les boules ouvertes et fermées de (X,d) sont à la fois ouvertes et fermées.

EXERCICE : 16 Démontrer les affirmations suivantes :

1. $]0, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbf{R}$. (Donner deux démonstrations différentes.)
2. $\mathbf{N}$ est un fermé de $\mathbf{R}$.

EXERCICE : 17 $^{(\star)}$

1. Dans l'espace $\mathbf{R}^2$, muni de la métrique du maximum

$$d_\infty(x,y) = max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|),$$

on considère le sous-espace $E = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$ muni de la métrique induite. Déterminer la boule ouverte $B_0((0,1);1)$ de E et son adhérence dans E. Déterminer la boule fermée $B((0,1);1)$ de E et son intérieur dans E.

A-t-on $\overline{B_0((0,1);1)} = B((0,1);1)$?

A-t-on $B_0((0,1);1) = \overset{\circ}{B}((0,1);1)$?

Déterminer les points frontière de $B_0((0,1);1)$ et de $B((0,1);1)$ dans E.

2. On considère le sous-espace

$$F = ([0,1]\times\{0\}) \cup (\{0\}\times[0,1]) \cup \bigcup_{\substack{n\in\mathbf{N}\\ n\geq 1}} \{\frac{1}{n}\}\times[0,1] \ \text{ de } \ (\mathbf{R}^2, d_\infty).$$

Décrire les boules ouvertes $B_0((0,1);1)$ et $B_0((1,0);1)$ de F et leurs adhérences dans F. Décrire les boules fermées $B((0,1);1)$ et $B((1,0);1)$ de F et leurs intérieurs dans F. Déterminer les points frontière de ces boules dans F.

3.2 - Suites ; valeurs d'adhérence -

Exercice : 18 Rappeler la définition de valeur d'adhérence d'une suite d'un espace métrique.

Donner l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites réelles suivantes :

1. $s_n = n$;
2. $t_n = \frac{3+n^2+2n}{n(\cos n - n)}$;
3. $u_n = \cos(\pi n/4)$;
4. $v_n =$ l'exposant de 2 dans la décomposition de n en facteurs premiers ;
5. $w_n = n(1+(-1)^n)$.

Exercice : 19 Le but de l'exercice est de définir et d'étudier la *limite supérieure* et la *limite inférieure* d'une suite réelle.

Soit (x_n) une suite de réels. Dans toutes les questions sauf la dernière, on suppose que (x_n) est bornée.

1. Pour tout n on pose $y_n = \inf\limits_{m\geq n} x_m)_n$. Montrer que (y_n) est croissante et convergente. Sa limite est notée $\liminf(x_n)$ et appelée *limite inférieure* de la suite (x_n).
2. Montrer que $y'_n = (\sup\limits_{m\geq n} x_m)_n$ est décroissante et convergente. Sa limite est notée $\limsup(x_n)$ et appelée *limite supérieure* de (x_n).
3. Montrer que $\limsup(x_n) \geq \liminf(x_n)$.
4. Montrer que si (x_n) est convergente $\limsup(x_n) = \liminf(x_n)$.
5. Montrer que $\limsup(x_n)$ et $\liminf(x_n)$ sont des valeurs d'adhérence de la suite (x_n), et que toute valeur d'adhérence de (x_n) est comprise entre ces deux limites.
6. En déduire que (x_n) converge si et seulement si $\limsup(x_n) = \liminf(x_n)$ et que cette valeur commune est la limite.
7. On ne suppose plus que (x_n) est bornée. Montrer que les résultats précédents restent valables si on se place dans $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Exercice : 20 Montrer que si (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels positifs on a

$$\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

et

$$\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n.$$

Montrer par des exemples que ces inégalités peuvent être strictes.

Exercice : 21 $^{(\star)}$ Soit $\varphi(n)$ la fonction indicatrice d'Euler. Montrer que

$$\liminf \frac{\varphi(n)}{n} = 0 \text{ et } \limsup \frac{\varphi(n)}{n} = 1.$$

On rappelle que $\varphi(n) = n \prod_{p|n}(1 - \frac{1}{p})$ et que la série des inverses des nombres premiers diverge.

Exercice : 22 $^{(\star)}$ Soit (x_n) une suite de réels, étant donné un réel a on définit le réel $f(a) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \liminf\big(\frac{1}{n} \operatorname{card}\{1 \leq k \leq n \ / \ x_k \in]a - \varepsilon; a + \varepsilon[\}\big)$. Montrer que si $f(a) > 0$ alors a est une valeur d'adhérence pour la suite (x_n).

Exercice : 23 $^{(\star)}$ Soient $(a, b) \in]0; 1]^2$, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres complexes.

On suppose que $\forall n \in \mathbf{N}$ $|u_n - a| \leq 1 - a$ et $|v_n - b| \leq 1 - b$, et, la suite $(|u_n v_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 1.

Montrer que les limites de (u_n) et (v_n) sont égales à 1.

3.3 - Applications continues -

Exercice : 24 Montrer qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue si et seulement si pour tout a dans $\mathbf{R}$ on a $f^{-1}(]a; +\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty; a[)$ sont des ouverts de $(\mathbf{R}, |.|)$.

Exercice : 25 (cf. cours) Refaire la démonstration du fait qu'une composée d'applications continues est continues en utilisant la définition avec les quantificateurs.

Exercice : 26 a) Montrer que l'application $\mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \sin(3x + 1)$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

b) Montrer que l'application $\mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur tout intervalle borné de $\mathbf{R}$, mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

c) $^{(\star)}$ Montrer que l'application $\mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

Exercice : 27 Soient $d_1, d_2 : \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+$ deux applications définies par $\forall (x, y) \in \mathbf{R}_+^*$ $d_1(x, x) = |x - y|$, $d_2(x, y) = |x^2 - y^2|$.

a- Montrer que d_1 et d_2 sont des distances.

b- Sont-elles équivalentes ?

c- Montrer qu'elles définissent la même topologie sur $\mathbf{R}_+^*$.

Exercice : 28 Soit (E, d) un espace métrique.

a- Étant donné $y_0 \in E$ fixé, montrer que l'application qui à $x \in E$ associe $d(x, y_0)$ est continue.

b- Étant donnée une partie A de E, montrer que l'application qui à $x \in E$ associe $d(x, A)$ est continue.

c- Montrer que l'application $d : E \times E \to \mathbf{R}$ est continue.

EXERCICE : 29 Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques. Montrer qu'une application $f : E \to E'$ est uniformément continue si et seulement si pour toutes suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x'_n) = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} d(f(x_n), f(x'_n)) = 0$.

3.4 - COMPLÉTUDE -

EXERCICE : 30 Soit (E, d) un espace métrique complet, soit $\{A_n\}_{n\geq 0}$ une suite de parties fermées bornées non-vides de E telles que $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$.

Pour $n \geq 0$ on pose $\delta(A_n) = \sup_{(x,y)\in A_n^2}(d(x, y))$. On suppose de plus que $\lim_{n\to+\infty} \delta(A_n) = 0$.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de E telle que pour tout n de $\mathbf{N}$ on a $x_n \in A_n$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy.
2. En déduire que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n \neq \varnothing$.
3. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$ contient exactement un point.

Question subsidiaire : dans le cas où $E = \mathbf{R}$ et $A_n = [a_n, b_n]$, le résultat précédent porte un nom. Lequel ?

EXERCICE : 31 Les espaces métriques suivants, munis de la distance induite par la distance usuelle de $\mathbf{R}$ (resp. la distance euclidienne de $\mathbf{R^2}$), sont-ils complets : $\mathbf{R}$, $[0; 1]$, $\mathbf{R}^2$, $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / y > x\}$, $\mathbf{N}$?

EXERCICE : 32 a) Soit X un ensemble et d_1, d_2 deux distances sur X. On suppose que d_1 et d_2 sont équivalentes, et que l'espace métrique (X, d_1) est complet. Montrer que (X, d_2) est complet.

b) Montrer qu'être complet n'est pas un invariant topologique, c'est-à-dire qu'il existe deux espaces métriques homéomorphes dont l'un est complet et l'autre non.

EXERCICE : 33 LEMME DU DEMI-MAXIMUM

Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to]0, +\infty[$ une fonction continue. On se propose de montrer la proposition suivante :

(P) il existe un point x^* dans X tel que $\forall y \in B(x^*, \frac{1}{\sqrt{f(x^*)}})$, on ait $f(y) \leqslant 2f(x^*)$.

a) Ecrire la négation de P.

b) On suppose que (P) est fausse. Montrer qu'il existe une suite de points x_n telle que $f(x_0) > 0$, $f(x_n) > 2f(x_{n-1})$ et $d(x_n, x_{n-1}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{f(x_{n-1})}}$

c) Montrer que la suite x_n est de Cauchy et conclure.

4 - Topologie générale -

4.1 - Notions de base -

Exercice : 34 Donner des exemples d'espaces topologiques pour lesquels il existe des parties :

- à la fois ouvertes et fermées,
- ni ouvertes ni fermées.

Exercice : 35 Parmi les sous-ensembles de $\mathbf{R}$ suivants, lesquels sont ouverts pour la topologie usuelle ? Lesquels sont fermés ?

$$]0;1[, [0;1],]0;1],]-\infty;1],]1;+\infty[, \varnothing, \{0\}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$$

Rédiger les démonstrations pour $]0,1[$ et pour $\mathbf{Q}$.

Exercice : 36 Reprendre les ensembles de l'exercice précédents et donner leurs intérieurs et les adhérences. Rédiger les démonstrations pour $]0;1]$ et $\mathbf{Z}$.

Exercice : 37 Soit l'ensemble $A =]0,5] \cup \{6\}$ muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbf{R}$.

a) Dire si les parties suivantes sont des ouverts ou des fermés de A,

$]0,1[$, $\{6\}$, $]1,4]$, $]2,5]$, $]0,2]$

b) $^{(\star)}$ Donner les intérieurs, adhérences et frontières de ces parties.

Exercice : 38 Montrer que $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \ / \ n \geq 1\}$ est un ensemble fermé de $\mathbf{R}$ muni de la topologie usuelle.

Exercice : 39 Donner des exemples de parties A et B de $\mathbf{R}$ telles que

-a- $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \neq \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$

-b- $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \overline{A \cap B}$

Exercice : 40 (cf. cours) Soit X un ensemble. On le munit de la topologie dont les ouverts sont les complémentaires des parties finies et l'ensemble vide.

a) Montrer que cette topologie est séparée si et seulement si X est fini.

b) Supposons X infini. Quelles sont les suites convergentes et quelles sont leurs limites ?

Exercice : 41 (cf. cours) Montrer que la topologie associée à la distance discrète est la topologie discrète.

Exercice : 42 $^{(\star)}$ Soit A un ensemble et soit $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'intervalles ouverts non vides de $\mathbf{R}$ tels que si $\alpha \neq \beta$ alors $I_\alpha \cap I_\beta = \varnothing$. Montrer que A est dénombrable.

Exercice : 43 Soit $f : E \to F$ une application d'un ensemble non vide E dans un espace topologique F. Posons $\mathcal{T} = \{f^{-1}(G) \ / \ G$ ouvert de $F\}$. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur E.

Exercice : 44 Soit $X = \{a, b, c\}$ un ensemble à trois éléments. Donner la liste de toutes les topologies sur X qui comportent exactement quatre éléments.

Exercice : 45 $^{(\star)}$ Montrer que si A est une partie non vide de $\mathbf{R}$ qui est a la fois ouverte et fermée, alors $A = \mathbf{R}$.

Indication : soit $a \in A$, $b \notin A$. Sans perte de généralité on suppose que $a < b$. Considérer la borne supérieure de l'ensemble $X = \{x \in A \mid x < b\}$.

Remarque : l'exercice montre que $\mathbf{R}$ est *connexe*. Cette notion sera approfondie dans la suite du cours.

Exercice : 46 $^{(\star)}$ Montrer que tout sous-groupe G de $\mathbf{R}$ est soit dense dans $\mathbf{R}$, soit fermé dans $\mathbf{R}$ et qu'alors si $G \neq \mathbf{R}$ alors il existe $\alpha > 0$ tel que $G = \alpha\,\mathbf{Z}$.

Exercice : 47 Soit A une partie d'un espace topologique. Montrer que $\mathrm{Fr}\overline{A} \subset \mathrm{Fr}(A)$ et $\mathrm{Fr}(\overset{\circ}{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$. Donner un exemple sur $\mathbf{R}$ où les inclusions sont strictes.

Exercice : 48 Soit X un espace topologique. Soient A et B des parties de X.

1. Montrer que si $A \cup B = X$ alors $\overline{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$; et si $A \cap B = \varnothing$ alors $\overline{A} \cap \overset{\circ}{B} = \varnothing$
2. On rappelle qu'un point $x \in X$ est appelé *point d'accumulation* de A si tout voisinage de x contient un point de A différent de x. On note A' l'ensemble des points d'accumulation de A.

   Montrer que $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Exercice : 49 On note $\mathfrak{O}$ l'ensemble des parties de $\mathbf{R}$ suivant $\mathfrak{O} = \big\{\{]-x; x[\ ,\ x \in \mathbf{R}_+^*\}; \mathbf{R}; \varnothing\big\}$ montrer que $\mathfrak{O}$ défini une topologie sur $\mathbf{R}$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur d'un ensemble à un élément pour cette topologie. Déterminer l'adhérence et l'intérieur d'un intervalle réel fermé contenant 0.

Exercice : 50 Soient E et F deux espace topologiques, $A \subset E$, $B \subset F$. Déterminer la frontière de $A \times B$.

4.2 - Applications continues -

Exercice : 51 Soit $f : X \to Y$ une application entre deux espaces topologiques.

a- Montrer que si X est muni de la topologie discrète alors f est continue.

b- Si Y est muni de la topologie grossière f est continue.

c- Si $Y = \mathbf{R}$ muni de la topologie usuelle, et si toutes les applications de X dans Y sont continues alors X est discret.

Exercice : 52 Dans cet exercice, $\mathbf{R}^2$ est muni de la topologie usuelle.

Démontrer les affirmations suivantes, quand elles sont vraies :

a) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + \sin y > 3\}$ est ouvert.

b) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -5 \leq x^2 + \sin y \leq -4\}$ est fermé.

c) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 = 1 \text{ et } y^3 \geq 2\}$ est fermé.

d) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 + x^2 + y^4 \geq 0\}$ est ouvert.

Indication : exprimer ces ensembles comme images réciproques de parties de $\mathbf{R}$ par des applications continues. On admettra que les applications utilisées sont continues. (cf. calcul différentiel)

EXERCICE : 53 Soient X et Y deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$ une application.

a- Montrer que si f est continue et surjective et si A est une partie dense de X, alors $f(A)$ est une partie dense de Y.

b- Montrer que si l'image directe par f de tout ouvert de X est un ouvert de Y et si B est une partie dense de Y, alors $f^{-1}(B)$ est une partie dense de X.

EXERCICE : 54 Montrer sur un exemple que l'image d'un ouvert par une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ n'est pas nécessairement un ouvert.

EXERCICE : 55 Soient $d_1, d_2 : \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+$ deux applications définies par
$\forall (x,y) \in \mathbf{R}_+^* \;\; d_1(x,x) = |x-y|,\; d_2(x,y) = |x^2 - y^2|$.

a- Montrer que d_1 et d_2 sont des distances.

b- Sont-elles équivalentes ?

c- Montrer qu'elles définissent la même topologie sur $\mathbf{R}_+^*$.

EXERCICE : 56 Montrer qu'une application est continue si et seulement si l'image de l'adhérence (resp. l'image réciproque de l'intérieur) d'une partie est contenue dans l'adhérence (resp. contenue dans l'intérieur) de l'image (resp. l'image réciproque) de cette partie.

EXERCICE : 57 (donné en cours) Classifier les lettres de l'alphabet à homéomorphisme près.

5 - COMPACITÉ -

EXERCICE : 58 Montrer qu'un espace topologique fini est compact.

EXERCICE : 59 $\mathbf{N}$ muni de la topologie discrète est-il compact ?

EXERCICE : 60 Montrer qu'un espace topologique discret est compact si et seulement si il est fini.

EXERCICE : 61 Redémontrer les théorèmes du cours sur les espaces compacts en utilisant la propriété de Bolzano-Weierstrass : (on supposera tous les espaces séparés)

a) L'image d'un compact par une application continue est compact.

b) Si X est compact et $Y \subset X$, alors Y est compact ssi Y est fermé.

c) Si $f : X \to Y$ est continue et bijective, et X compact, alors f est un homéomorphisme.

EXERCICE : 62 Soient (X,d) un expace métrique compact et $f : X \to X$ une application telle que $\forall (x,y) \in X^2, x \neq y \;\; d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Montrer que f admet un unique point fixe. Indication : chercher à minimiser la fonction qui à x associe $d(x, f(x))$.

Question(s) subsidiaire(s) $^{(\star)}$: donner des exemples montrant que le résultat n'est pas vrai...

a) si on ne suppose plus X compact ;

b) si on suppose seulement $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$.

EXERCICE : 63 Soit X un espace métrique. On suppose que pour tout $x \in X$ la boule fermée de centre x et de rayon 1 est compacte.

a- Montrer que X est complet.

b- Si $K \subset X$ est une partie compacte de X, montrer que l'ensemble $K^{1/2} = \{x \ / \ \exists y \in K \ d(x, y) \leq 1/2\}$ est compact.

EXERCICE : 64

a) (vu en cours) Montrer que si (x_n) est une suite convergente, de limite x dans un espace métrique, alors $\{x\} \cup \{x_n \ n \in \mathbf{N}\}$ est compact.

b) $^{(\star)}$ Soit $f : E \to F$ une application injective entre deux espaces métriques telle que l'image de tout compact est un compact. Montrer que f est continue.

EXERCICE : 65 Soient X un espace métrique et Y un espace métrique compact. Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue
2. le graphe de f, c'est-à dire l'ensemble $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y / y = f(x)\}$ est fermé.

EXERCICE : 66 Soit X un espace métrique et (x_n) une suite de X qui a une unique valeur d'adhérence.

a) On suppose que X est compact. Montrer que (x_n) est convergente. (Vu en cours.)

b) Montrer par un exemple que ce n'est pas vrai en général si X n'est pas compact.

EXERCICE : 67 Montrer que tout espace métrique compact est borné.

EXERCICE : 68 RETOUR SUR LA DISTANCE À UNE PARTIE

Soit (E, d) un espace métrique, A une partie non vide de E et x un élément de E. On rappelle que $d(x, A)$ est par définition égal à $\inf_{y \in A} d(x, y)$.

a) Montrer que si A est compact, cette borne inférieure est atteinte, c'est-à-dire il existe $y \in A$ tel que $d(x, y) = d(x, A)$.

b) Montrer qu'en général ce n'est pas vrai si A n'est pas compact.

c) $^{(\star)}$ On se place dans le cas particulier où (E, d) est $\mathbf{R}^2$ muni de la métrique euclidienne. Le résultat du a) subsiste-t-il si on suppose seulement A fermé ?

d) $^{(\star)}$ On prend maintenant deux parties A_1, A_2 de E et on pose $d(A_1, A_2) = \inf_{y_1 \in A_1} d(y_1, A_2)$. On cherche une condition suffisante pour qu'il existe $y_1 \in A_1$ et $y_2 \in A_2$ tels que $d(y_1, y_2) = d(A_1, A_2)$. Suffit-il de supposer que A_1 est compact ? Que A_1 est compact et A_2 fermé ? Que A_1 et A_2 sont fermés ?

EXERCICE : 69

a) Soit X le disque unité dans $\mathbf{R}^2$ et $f : X \to X$ l'application qui à (x, y) associe $(x/2, y/2)$. On considère la suite $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de parties de X définie par récurrence en posant $K_0 = X$ et $K_{i+1} = f(K_i)$. Dessiner K_0, K_1, K_2. Quelle est l'intersection des K_i ?

b) Même question quand X est le rectangle $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$ et $f(x, y) = (-x, y/2)$.

c) On suppose maintenant que X est un espace topologique compact non-vide quelconque, et $f : X \to X$ une application continue. Montrer qu'il existe une partie fermée non-vide K de

X telle que $K = f(K)$.

Indication : utiliser la construction des a) et b).

d) $^{(\star)}$ Montrer par un exemple que la compacité est nécessaire dans c).

Exercice : 70 Ensemble de Cantor

Pour $k \in \mathbf{N}$ on pose $C_k = [0;1] \setminus \bigcup_{0 \le s \le 3^{k-1}-1 \ | \ s \in \mathbf{N}} \left] \frac{3s+1}{3^k}; \frac{3s+2}{3^k} \right[$.

On pose $C = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} C_k$. On appelle C *l'ensemble de Cantor*. On le munit de la topologie induite par la topologie usuelle sur $\mathbf{R}$. Le but est de démontrer les affirmations suivantes :

a) C est compact.

b) $^{(\star)}$ C n'a aucun point isolé.

c) $^{(\star)}$ L'intérieur de C est vide.

Indication : on pourra utiliser la notion de développement triadique : pour $x \in [0,1]$ il existe une suite de nombres entiers $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ compris entre 0 et 2 tels que $x = \Sigma_{k=1}^{+\infty} a_k/3^k$. Caractériser les éléments de C en termes des nombres a_k.

Exercice : 71 $^{(\star)}$ Soit p un nombre premier, montrer que l'on définit une distance sur $\mathbf{Z}$ en posant $d(x,y) = 0$ si $x = y$ et, lorsque $x \neq y$, $d(x,y) = e^{-\alpha}$ si p^α divise $x - y$ et $p^{\alpha+1}$ ne divise pas $x - y$. Montrer que d est une distance et vérifie l'inégalité ultramétrique $d(x,y) \le Max(d(x,z); d(y,z))$ pour tout triplet (x,y,z) d'entiers.

Notons X le complété de $\mathbf{Z}$ pour cette distance.

Soit $\varepsilon \in]0;1[$, et soit N un entier tel que $e^{-N} \le \varepsilon \le e^{-N+1}$.

Montrer que $\mathbf{Z} = \bigcup_{0 \le r \le p^N} (p^N \mathbf{Z} + r)$, en déduire que l'on peut recouvrir $\mathbf{Z}$ par un nombre fini de boules fermées de rayon ε.

En déduire que (X,d) est compact.

6 - Connexité -

Exercice : 72 Montrer qu'un espace discret est connexe si et seulement si il est réduit à un point. Montrer que tout espace grossier est connexe.

Exercice : 73 Montrer que deux espaces topologiques E et F sont connexes si et seulement si $E \times F$ est connexe.

Exercice : 74 Soient X un espace topologique et A une partie de X. Montrer que A est une partie connexe de X si et seulement si pour tout couple (U_1, U_2), d'ouverts de X tel que $A \subset U_1 \bigcup U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, alors $A \subset U_1$ ou $A \subset U_2$.

Exercice : 75 Soient A et B deux parties connexes d'un espace topologique, telles que $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.

Exercice : 76 Parmi les signes de ponctuation suivants lesquels sont connexes ? (On ne demande pas de démonstration.)

Exercice : 77 L'ensemble de Cantor C est-il connexe ? Qu'en est-il du produit cartésien $C \times [0, 1]$?

Exercice : 78 a) Soit X un espace métrique connexe par arcs non borné. Montrer que pour tout $x_0 \in X$ et tout $r > 0$, la sphère de centre x_0 et de rayon r est non-vide. (Indication : appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $x \mapsto d(x, x_0)$.)

b) Même exercice en remplaçant "connexe par arcs" par "connexe".

Exercice : 79 Soit $f : [0; 1] \to [0; 1]$ continue. Montrer de deux manières différentes qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$:

a) en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires ;

b) en utilisant directement le fait que $[0, 1]$ est connexe.

Exercice : 80 Soit E un espace topologique. On rappelle qu'une fonction f de E dans $\mathbf{R}$ est *localement constante* si tout point $x \in E$ admet un voisinage $U \subset E$ tel que la restriction de f à U est constante.

Montrer que toute fonction continue, localement constante, sur un espace connexe E, est constante. (Indication : Considérer $A = \{x \in E; f(x) = f(x_0)\}$, avec x_0 fixé.)

Exercice : 81 Le but de l'exercice est de montrer la proposition suivante :

"Tout ouvert connexe de $\mathbf{R}^n$ est connexe par arc."

a) Soit U un ouvert connexe non-vide de $\mathbf{R}^n$. Soit x_0 un point de U. On pose $V = \{x \in U | \exists f : [0, 1] \to U \text{ continue telle que } f(0) = x_0,\ f(1) = x\}$. Montrer que V est ouvert et fermé dans U.

b) Conclure.

Exercice : 82 a) Montrer que la connexité est un invariant topologique : si X et Y sont deux espaces topologiques homéomorphes et si X est connexe, alors Y est connexe.

b) En déduire que les intervalles $]a; b[$ et $]a; b]$ avec $a < b$ ne sont pas homéomorphes. (Indication : voir exercice suivant.)

c) $^{(\star)}$ Retrouver le résultat du b) en considérant les compactifiés d'Alexandrov.

Exercice : 83 a) Les espaces topologiques $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ et $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ sont-ils connexes ?

b) En déduire que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

c) Montrer que S^1 (le cercle unité dans $\mathbf{R}^2$) n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbf{R}$.

Exercice : 84 Soit A une partie connexe d'un espace topologique X.

a) Montrer que l'adhérence de A est connexe (réciproque ?).

b) Soit B tel que $A \subset B \subset \bar{A}$, montrer que B est connexe.

c) $^{(\star)}$ En utilisant la projection stéréographique, montrer que S^n (la sphère unité dans $\mathbf{R}^{n+1}$) est connexe.

Exercice : 85 Montrer que l'image continue d'un espace connexe par arc est connexe par arc, c'est-à-dire :

Soient X et Y des espaces métriques et $f : X \to Y$ une application continue. Si X est connexe par arcs, alors $f(X)$ aussi.

Exercice : 86 $^{(\star)}$ Soit (E,d) un espace métrique connexe et F un fermé de E. On suppose que $\mathrm{Fr}(F)$ est connexe. Montrer que F est connexe. Est-ce encore vrai si F n'est pas fermé ?

Exercice : 87 $^{(\star)}$ Soit (E,d) un espace métrique compact et $(u_n)_n$ une suite de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(u_n,u_{n+1}) = 0$. Montrer que l'ensemble A des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ est connexe.

Indication : montrer d'abord que A est compact. Si A est la réunion disjointe de deux fermés F_1, F_2, alors $d(F_1,F_2) > 0$. En déduire une contradiction.

Exercice : 88 $^{(\star)}$ Soit f une application continue de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même. Étant donné un point x_0 de $\mathbf{R}^n$ on définit la suite (x_n) par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \geq 1$. On suppose que la suite ainsi définie admet une et une seule valeur d'adhérence. Montrer que la suite converge.

Exercice : 89 $^{(\star)}$ Soit f une application dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$. (Considérer l'ensemble $\{\frac{f(x)-f(y)}{x-y}, (x,y) \in I^2, x < y\}$)

Exercice : 90 $^{(\star)}$

a- On considère le “peigne” dans $\mathbf{R}^2$, $E = (\mathbf{Q} \times [0,1]) \cup (\mathbf{R} \times 0) \subset \mathbf{R}^2$. Montrer que E est connexe (et même connexe par arcs) mais que E n'est pas localement connexe.

On utilisera le fait que dans un espace localement connexe, les composantes connexes d'un ouvert sont ouvertes.

b- Soit $A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x > 0,\ y = \sin\frac{1}{x}\right\}$. Montrer que A est connexe, connexe par arcs, localement connexe.

c- Déterminer $\overline{A}$ et montrer que $\overline{A}$ est connexe mais qu'il n'est ni connexe par arcs, ni localement connexe.

On considèrera $U = \overline{A} \cap (\mathbf{R}\times] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$ *ouvert de* $\overline{A}$ *et la composante connexe de* $(0,0)$ *dans* U.

Exercice : 91 $^{(\star)}$

a- Montrer que l'ensemble des matrices unitaires de C, noté $U(n,\mathrm{C})$, est connexe par arcs.

b- Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathbf{R}$, noté $O(n,\mathbf{R})$, a deux composantes connexes.

7 - Espace vectoriels normés -

Exercice : 92 Dans cet exercice, l'ensemble $M_n(\mathbf{R})$ des matrices carrées $n \times n$ est muni de sa topologie d'espace vectoriel normé.

a) Montrer que le groupe orthogonal $O(n,\mathbf{R})$ est compact.

b) Montrer que le groupe des matrices inversibles $\mathrm{GL(n,\mathbf{R})}$ est un ouvert de $M_n(\mathbf{R})$.

Exercice : 93 Théorème Ergodique

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. On rappelle que $L(E)$ est munie de la norme $\|A\| = \sup\{\|Ax\| \mid \|x\| \leq 1\}$.

a) Question de cours. Soit $A \in L(E)$. Montrer que les applications L_A et R_A de $L(E)$ dans lui même définies par $L_A(X) = AX$ et $R_A(X) = XA$ sont continues.

b) Soit $A \in L(E)$ une application linéaire telle que $\|A\| \leq 1$. On note A_n la suite $A_n = \frac{1}{n+1}(\mathrm{Id} + A + \ldots\ldots + A^n)$.

1) Montrer que cette suite admet une valeur d'adhérence.

2) Montrer que si P est une valeur d'adhérence $P.A = A.P = P$

3) Montrer que si P' est une autre valeur d'adhérence $PP' = P'P = P$ et en déduire que $P = P'$.

4) Montrer que A_n converge.

Exercice : 94 Soit E l'espace des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbf{R}$. Pour tout f de E on pose $N_1(f) = \int\limits_0^1 |f(t)|dt$ et $N_\infty(f) = sup_{t\in[0;1]}|f(t)|$. Montrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur E, sont-elles équivalentes ?

Exercice : 95 Soit f une application linéaire entre deux K-espace vectoriel normés E et F. Montrer que si f est continue alors le noyau de f est fermé.

Montrer que si le noyau de f est fermé et $F = K$ alors f est continue.

Exercice : 96 Soit C un convexe d'un evn E. Montrer que l'intérieur de C est dense dans C dès que cet intérieur est non vide.

Montrer que si A est un ouvert convexe de E tel que $A \subset C$ et $\overline{A} = C$ alors $A = \overset{\circ}{C}$.

Exercice : 97 Notons $E = \mathbf{R}[X]$. Soient T l'application de E dans E qui à un polynôme associe sont polynôme dérivé, et N l'application de E dans $\mathbf{R}$ qui prend pour valeur 0 en 0 et telle que $\forall P \in E \quad N(P) = \sum\limits_{n=0}^{\deg(P)} \frac{|P^{(n}(0)|}{n!}$.

a- Montrer que N est une norme sur E.

b- L'application T est-elle continue pour cette norme ? (indication : on pourra considérer les suites $(X^k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(T(X^k))_{k\in\mathbf{N}}$)

Exercice : 98 Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1. Notons N l'application définie, sur $\mathcal{P}_n$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^+$, par $N(P) = sup_{0\leq j\leq n}|a_j|$ où $P(X) = \sum_{j=0}^n a_j X^j$. Montrer que N permet de munir $\mathcal{P}_n$ d'une structure d'espace vectoriel normé.
2. Montrer que si $m < n$ alors $\mathcal{P}_m$ est une partie fermée de $\mathcal{P}_n$.
3. Étudier la continuité de l'application qui à un polynôme de $\mathcal{P}_n$ associe son degré.

Exercice : 99 Soit $I = [a;b]$, et soit $(f_n)_n$ une suite de $C(I,\mathbf{R})$ l'ensemble des applications continues de I dans $\mathbf{R}$.

1- On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge simplement, et que cette suite est croissante (i.e. $\forall x \in I f_n(x \leq f_{n+1}(x)))$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément (Utiliser la compacité de I).

2- Posons $I = [0; 1]$, on définit par récurrence sur n une suite de fonctions continues sur I : $u_1(t) = 0$; $u_2(t) = \frac{1}{2}(t)$ et $u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}(t - u_n^2(t))$.

Montrer que les u_n sont des polynômes qui vérifient $\forall t \in I\ u_n(t) \leq \sqrt{t}$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante et convergente. Montrer qu'elle converge uniormément vers $\sqrt{t}$.

Exercice : 100 Considérons $A_{p,q}$ l'ensemble des matrices réelles de taille $p.q$ comme sous-espace de $\mathbf{R}^{pq}$, et B_n l'ensemble des matrices réelles inversibles de taille $n.n$ comme sous-ensemble de $\mathbf{R}^{n^2}$. Montrer qu'étant donné un espace X et deux applications continues $f : X \to A_{p,q}$ $g : X \to A_{q,r}$ l'application produit $fg : X \to A_{p,r}$ est continue.

Montrer qu'étant donné un espace X et une application continue $f : X \to B_n$, l'application $g : X \to B_n\ x \mapsto (f(x))^{-1}$ est continue.

Exercice : 101 Soient $E = \mathrm{C}_n[X]$, $F = \mathrm{C}_m[X]$ et $G = \mathrm{C}_{n+m}[X]$ des C-espaces vectoriels de polynômes normés par $||\sum_i a_i X^i|| = sup_i |a_i|$. Notons p l'application $p : E \times F \to G$ qui au couple (P, Q) associe $p(P, Q) = PQ$. Donner la norme de cette application.

Exercice : 102 Soit l^1 le sous-espace vectoriel normé des suites complexes $u = (u_n)_n$, telles que la suite $(\sum_n |u_n|)_n$ soit convergente, normé par $||u|| = \sum_{n \geq 0} |u_n|$. Montrer que l'application $p : l^1 \times l^1 \to l^1$ définie par $p(u, v) = (\sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p})_n$ est bilinéaire continue ; calculer sa norme.

Exercice : 103 Soit $I = [a; b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$, on note C l'ensemble des applications de I dans $\mathbf{R}$, qui sont dérivables et de dérivées continues.

Montrer que pour $f \in C$, $||f|| = sup_{t \in I} |f(t)| + sup_{t \in I} |f'(x)|$ muni C d'une structure d'evn.

Montrer que C est un evn complet pour cette norme.

Exercice : 104 Soit E un $\mathbf{R}$-evn et A, B deux parties de E. Si A est un ouvert, montrer que $A + B$ est un ouvert.

Si A est compact et B fermé, montrer que $A + B$ est fermé. Le résultat est-il vrai si A est seulement fermée ?

Exercice : 105 $^{(\star)}$ Soit K un compact convexe d'un evn, et soit $f : K \to K$ une application continue telle que

$$\forall (x, y) \in K^2 \ \ ||f(x) - f(y)|| \leq ||x - y||.$$

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice : 106 Démontrer qu'un espace vectoriel normé qui admet une base dénombrable n'est jamais complet.

Indic ?

Exercice : 107 Soit E un espace vectoriel normé tel que B, l'adhérence de la boule unité, est compacte.

1. Construire une famille finie $(a_i)_{i=1\ldots n}$ telle que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \frac{1}{2})$.
2. Montrer que F le sous-espace vectoriel engendré par les $(a_i)_{i=1\ldots n}$ est fermé.

3. Supposer que $E \neq F$ et montrer qu'il existe $x \in E \backslash F$ tel que $\alpha = \inf\{d(x,y) \,/\, y \in F\} > 0$.
4. Montrer que l'on peut choisir un élément y de F tel que $\alpha \leq ||x-y|| \leq 3\frac{\alpha}{2}$, et construire un nouvel élément de F qui met en defaut la minimalité de α.
5. En déduire que E est de dimension finie.

EXERCICE : 108 (*) Soient (X,d) et (X',d') deux espaces métriques. Une Partie A de $C(X,X')$ (l'ensemble des application continue de X dans X') est dite uniformément équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que , pour tout $(x,y) \in X^2$ et tout $f \in A$ tels que $d(x,y) < \alpha$ on ait $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

a- On suppose que X est compact. Montrer que toute partie équicontinue de $C(X,X')$ est uniformément équicontinue.

b- Soit Y un espace topologique, $A \subset C(X,Y)$ une partie équicontinue et $B \subset C(X,X')$. Posons $B \circ A = \{g \circ f,\ f \in A, g \in B\} \subset C(Y,X')$. Montrer que si B est uniformément équicontinue alors $B \circ A$ est équicontinue. Ce résultat reste-t-il vrai si B est seulement équicontinue ?

Examen de septembre 2002

Exercice 1

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est-elle uniformément continue.

Soit X un espace métrique et $A \subset X$ un sous-ensemble. Si $x \in X$, on note $d(x,A)$ la fonction $\inf_{y \in A} d(x,y)$.

1. Montrer que $d(.,A)$ est une fonction 1-Lipshitzienne.
2. Montrer que $A = \{x/d(x,A) = 0\}$.
3. Si A et B sont deux fermés disjoints, montrer que la fonction $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,B)+d(x,A)}$ est continue, nulle sur A et vaut 1 sur B.

Exercice 2

Soit X un espace métrique. On suppose que pour tout $x \in X$ la boule fermée $B(x,1)$ est compacte.

1. Montrer que X est complet.
2. Si $K \subset X$ est compacte, montrer que $K^{+1/2} = \{x/\exists y \in K d(x,y) \leq 1/2\}$ est compacte.
3. On suppose que X est connexe. Montrer que pour tout couple $x \in X$ $r \geq 0$ la boule $B(x,r)$ est compacte.

Exercice 3

Soit X un espace métrique, et $A \subset X$ un sous-ensemble. On note $A' = A/A$ l'ensemble des points adhérents à A qui ne sont pas dans A. Par récurrence, on définit les ensembles $A^{[n]} = (A^{[n-1]})$'

1. Montrer que $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$ et que $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
2. On suppose désormais que $X = \mathbb{R}$ est la droite réelle, on consière $B \subset [0,a]$ une partie non vide et l'on pose $C = \{2^{-k}(a+t), t \in B, k \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $C' = \{2^{-k}(a+t), t \in B', k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

3. Montrer que si $B^{[n]} \neq \varnothing$ alors$C^{[n+1]} = \{2^{-k}(a+t), t \in B^{[n+1]}, k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ et que si$B^{[n]} = \varnothing$ alors$C^{[n+1]} = \varnothing$
4. Montrer (par récurrence) que pour tout entier n il existe une partie B de $[0, a]$ telle que $B^{[n]} \neq \varnothing$

Examen de janvier 2003

Exercice 1 (Question de cours.) Soit X un espace métrique compact ; est-ce que X est complet ? Si oui le démontrer, si non donner un contre-exemple.

Exercice 2 Soit $f : X \to Y$ une application continue surjective entre deux espaces métriques, et $Z \subset X$ un sous-ensemble dense ($\bar{Z} = X$). Montrer que $f(Z)$ est dense.

Exercice 3 Soit $f : X \to Y$ une application, $A \subset X; B \subset Y$ deux sous-ensembles. Montrer que $B \cap f(A) = f(f^{-1}(B) \cap A)$.

Exercice 4 a) Montrer (on pourra se contenter d'un dessin) que $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs.

b) Soit $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une fonction polynôme. Montrer que le complémentaire de $P^{-1}(0)$ est connexe par arcs. (indication, pour joindre deux points a, b dans C^n ou pourra chercher un chemin dans la droite (affine) complexe passant par ces deux points.

c) Soient $P_1, P_2, \ldots . P_k$ k polynômes. Montrer que l'ensemble des points où au moins l'un de ces polynômes ne s'annulle pas est connexe par arcs.

Exercice 5 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3. On muni l'ensemble $L(E)$ des applications linéaires de E dans E de sa norme usuelle.

On note $O^+(E)$ le groupe des rotations de E, qui est le groupe des isométries de E qui conserve l'origine. On rappelle que dans une base orthonomée convenable, la matrice d'une rotation ρ peut s'écrire $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $\theta \in [0, \pi]$ désigne l'angle de cette rotation.

a) Montrer que $O^+(E)$ est connexe par arcs (on pourra joindre une rotation donnée à l'identité par une famille de rotations d'angles variables).

b) On note $\operatorname{tr} x$ la trace d'une matrice x. Soit $\varepsilon \neq \mathrm{Id}$ une rotation fixée à l'avance. On considère l'application $f : O^+(E) \to [-1, 3]$ définie par $f(x) = \operatorname{tr}(x\varepsilon x^{-1}\varepsilon^{-1})$. Utiliser a) pour montrer que l'image de f est de la forme $[\alpha, 3]$, ou $]\alpha, 3]$ avec $\alpha \neq 3$.

c) En déduire qu'il existe un entier $n \neq 0$ et un élément x de $O^+(E)$ tel que $x\varepsilon x^{-1}\varepsilon^{-1}$ soit une rotation d'angle π/n.

d)*(Cette question est hors-barême, et ne compte que pour des points supplémentaires.)* Montrer que si un sous groupe distingué N de $O^+(E)$ contient un élément $\varepsilon \neq \mathrm{Id}$ alors il contient une reflexion (une rotation d'angle π) et -en admettant le fait que les rotations d'angle πsont conjuguées dans $O^+(E)$ et engendrent ce groupe- que $O^+(E) = N$ (autrement dit $O^+(E)$ est simple).

Examen de septembre 2003

Exercice 1 Soit X un espace métrique compact, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de X. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La suite x_n est convergente.

2. La suite x_n admet une unique valeur d'adhérence.

Exercice 2 Soit X un espace métrique connexe, $F \subset X$ un fermé, et $\dot{F}$ son intérieur. On pose $\partial F = \{x \in F \text{ tels que } x \notin \dot{F}\}$.

a) Montrer que ∂F est fermé.

b) On suppose que F n'est pas connexe ; donc F est la réunion disjointes de deux fermés non vides F_1, F_2 . Montrer que $\dot{F} = \dot{F}_1 \cup \dot{F}_2$.

c) En déduire que si ∂F est connexe, alors F est connexe.

Exercice 3 Soit $E_n = \mathbb{R}^n$ muni de la norme $||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $F_m = \mathbb{R}^m$ muni de la norme $||(y_1, \ldots, y_m)|| = \sum_{j=1}^n |y_j|$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$ une matrice à n colonnes et m lignes et qui définit donc une application linéaire de E_n dans F_m.

Montrer que la norme de A, en tant qu'application linéaire de E_n dans F_m est

$\|A\| = \mathrm{Sup}_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{i,j}|$.

Exercice 4 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni de sa topologie usuelle. Si x, y sont deux éléments de C on note $[x, y] = \{z \in E_n / \exists t \in [0,1], z = tx + (1-t)y\}$ le segment joignant x à y.

Une partie C de E est dite *convexe* si pour tout couple x, y de points de C le segment $[x, y]$ est contenu dans C.

1) Soit N une norme sur E. Montrer que la boule unité $B_N(0,1) = \{x / N(x) \leq 1\}$ est convexe.

On se fixe une partie convexe compacte C, d'intérieur non vide, et on suppose que $0 \in C^0$ est un point intérieur. Il existe donc un $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset C$.

2) Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Montrer que l'ensemble $I_x = \{\lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \frac{1}{\lambda}x \in C\}$ est un intervalle fermé non vide de $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$.

On pose alors $j(x) = \mathrm{Inf}\, I_x$ si $x \neq 0$ et $j(0) = 0$.

3) Montrer que $j(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ et que $j(x) \leq 1$ si et seulement si $x \in C$.

4) Montrer que $j(x + y) \leq j(x) + j(y)$

5) Montrer que, si $a > 0$, $j(ax) = aj(x)$

6) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. j est une norme.
2. C est la boule unité d'une norme.
3. C est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire que $x \in C \Leftrightarrow -x \in C$

Examen de janvier 2004

Exercice 1. (Question de cours) Soient X, Y deux espaces métriques et f une application continue de X dans Y. On suppose que X est compact.

a) Montrer que f est uniformément continue.

b) Donner un exemple d'une fonction uniformément continue qui n'est pas Lipschitzienne.

Exercice 2. Soit X un espace métrique, A, B deux parties telles que $X = A \cup B$. Montrer que, si B^0 désigne l'intérieur de B et $\bar{A}$ l'adhérence de A, on a $\bar{A} \cup B^0 = X$

Exercice 3. Soit K un espace métrique compact, et $f_n : K \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues. On suppose que :

-i la suite f_n est croissante, c'est-à-dire que pour tout x et tout n. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$

-ii la suite f_n converge simplement vers une fonction continue f, c'est-à-dire que pour tout x,on a $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.

A) Soit $\epsilon > 0$ un nombre fixé.

Pour tout entier n, on pose $O_n^\epsilon = \{x \in K \text{ tels que } f_n(x) > f(x) - \epsilon\}$.

1) Montrer que O_n^ϵ est ouvert et que $O_n^\epsilon \subset O_{n+1}^\epsilon$.

2) Montrer que l'ensemble des $(O_n^\epsilon)_{n \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement d'ouverts de K.

3) En déduire qu'il existe un n tel que $K = O_n^\epsilon$.

B) Montrer que f_n converge uniformément vers f.

Exercice 4. On identifie l'ensemble $\mathcal{C}$ des cercles du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ à l'ensemble $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$des couples formés d'un point de $\mathbb{R}^2$ (le centre du cercle), et d'un nombre positif $r \geqslant 0$ son rayon (un cercle peut être de rayon nul, c'est-à-dire réduit à un point). Ainsi $\mathcal{C}$ est muni d'une topologie.

a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_p$ des cercles passant en un point p est fermé.

b) Montrer que si $K \subset \mathbb{R}^2$ est compact, l'ensemble $\mathcal{C}_K$des cercles inclus dans K est compact.

c) Montrer que si K est compact, il existe un cercle $C(c, r)$ de rayon maximal contenu dans K.

d) Soit K une partie convexe de $\mathbb{R}^2$; montrer que l'ensemble des cercles inclus dans K est connexe.

Problème : 1

I. Soit (X, τ) un espace topologique. On dit qu'une partie E de X est *rare* si $\overset{\circ}{\overline{E}}$ est vide. Une partie de X qui est au plus une réunion dénombrable de parties rares est dite *maigre*.

a- Montrer que si A est rare toute partie de $\overline{A}$ est rare.

c- Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Toute partie maigre est rare.
2. Pour toute suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fermés rares $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} F_n$ est rare.
3. Pour tout suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'ouverts denses $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} U_n$ est dense.

On dit qu'un espace topologique pour lequel l'une de ces assertions est vérifiée est un espace de *Baire*.

d- Montrer que toute partie ouverte d'un espace de Baire est de Baire.

II. Soit E un espace métrique, soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ouverts denses de E et soit Ω un ouvert non vide de E.

a- Montrer que $\Omega \cap U_0$ contient un fermé non rare, que l'on note F_0. Construire par récurrence une suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fermés non rares tels que $F_n \subset \overset{\circ}{F}_{n-1} \cap U_n$.

b- Si l'on suppose que E est un espace métrique complet, montrer que $\bigcap\limits_n F_n$ et $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} U_n \cap \Omega$ sont non vides.

c- Montrer que tout espace métrique complet est de Baire.

d- Montrer que tout intervalle de $\mathbf{R}$ est de Baire.

III. Soit E un espace métrique de Baire, et soit $(f_n) : E \to \mathbf{R}$ des applications continues. On suppose que $\lim_\infty f_n(x) = f(x)$ existe pour tout x de E.

a- Montrer que pour tout ε positif les ensembles $E_{pq}(\varepsilon) = \{x \in E \ / \ |f_p(x) - f_q(x| > \varepsilon)\}$ et $F_p(\varepsilon) = \bigcup\limits_{q\geq p} E_{pq}(\varepsilon)$ sont des ouverts de E. Montrer que $F(\varepsilon) = \bigcap\limits_{p\in\mathbf{N}} F_p(\varepsilon)$ est vide.

b- En déduire que $G(\varepsilon) = \bigcap\limits_{p\in\mathbf{N}} \overline{F_p(\varepsilon)}$ est rare et que $B = \bigcup\limits_{N\geq 1} G(\frac{1}{N})$ est maigre.

c- Montrer que f est continue sur le complémentaire de B dans E.

d- Montrer que les application $g_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui à x associent 1 si $n!x$ est un entier relatif et 0 sinon, sont des limites de fonctions continues.

Montrer que l'application $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui à x associe 1 sur x est rationnel et 0 sinon est limite des g_n.

L'application g est-elle limite de fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$?

IV. Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application C^∞ vérifiant qu'en chaque point x de $\mathbf{R}$ il existe un entier n tel que $\varphi^{(n)}(x) = 0$.

On pose $F_n = \{x \in \mathbf{R} \ / \ \varphi^{(n)}(x) = 0\}$ pour tout n de $\mathbf{N}$, puis $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overset{\circ}{F_n}$ et $F = \mathbf{R} \setminus \Omega$.

a- Soit $(x_p)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite de points distincts de $\mathbf{R}$ tendant vers $x \in \mathbf{R}$ telle qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ vérifiant $\varphi^{(n_0)}(x_p) = 0$ pour tout p. Montrer que $\varphi^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq n_0$.
b- Montrer sur tout intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenu dans Ω l'application φ est polynômiale. (Penser à la formule de Mac-Laurin)
c- Montrer que F n'a pas de point isolé.
d- En supposant que $F \neq \varnothing$ établir φ est une fonction polynôme.

Problème : 2 Dans ce problème on se propose de démontrer le théorème de la borne supérieure.

«Toute partie non vide majorée de $\mathbf{R}$ admet une borne supérieure.»

Pour cela on suppose connu l'écriture décimale des nombres réels.

1. Soit P une partie non vide majorée de $\mathbf{R}_+$. Montrer que l'ensemble pris par les parties entières des éléments de P est fini. Soit M le plus grand élément de cet ensemble et P_0 le sous-ensemble des éléments de P ayant M comme partie entière. Montrer que P_0 admet une borne supérieure si et seulement si P admet une borne supérieure, et que ces deux bornes coïncident.
2. Supposons que $M = 0$, ce qui entraine $P = P_0 \subset [0; 1[$ et tout élément x de P s'écrit $x = 0,\ d_1(x)\, d_2(x) \ldots d_n(x) \ldots$ avec $\forall n\ \exists m > n \ \ d_m(x) \neq 9$.

   Soit $a_1 = max\{d_1(x) \ / \ x \in P\}$ et P_1 le sous-ensemble de P constitué des éléments qui vérifient $d_1(x) = a_1$.

   On définit par récurrence une suite de nombres (a_i) et une suite (P_i) de parties de P, avec $P_i \subset P_{i-1}$, de la manière suivante
   $a_{i+1} = max\{d_{i+1}(x) \ / \ x \in P_i\}$
   $P_{i+1} = \{x \in P_i \ / \ d_{i+1}(x) = a_{i+1}\}$
   On va maintenant démontrer que le nombre $b = 0, a_1\, a_2 \ldots a_i \ldots$ est la borne supérieure de P

   a- Si l'intersection de tous les P_i est non vide montrer qu'elle est réduite à l'élément b.
   b- Si l'intersection de tous les P_i est vide montrer que tous les éléments de P sont strictement inférieurs à b et que pour tout x de P il existe un entier i tel que $x \in P_i$.
   c- En déduire le théorème de la borne supérieure.

Problème : 2 Isométries d'un espace métrique

Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \to F$ une application continue, vérifiant $\forall (x, y) \in E^2,\ \ \mathrm{d}(f(x), f(y)) \geq \mathrm{d}(x, y)$.

a- Montrer que f est une isométrie (étant donné deux points x et y de E, on pourra considérer la suite $(f^n(x), f^n(y))_{n\in\mathbf{N}}$).

b- Montrer que f est bijective.

c- Si f est bijective et vérifie $\forall (x,y)\in E^2,\ \mathrm{d}(f(x),f(y))\leq \mathrm{d}(x,y)$, montrer que f est une isométrie.

Problème : 3 Théorème de d'Alembert

Soit P un polynôme de degré n à coefficients complexes.

a- Montrer qu'il existe un réel r positif tel que pour tout complexe z de module strictement supérieur à r on ait $|P(z)| > |P(0)|$.

b- Montrer qu'il existe un complexe z_0 tel que $|z_0|\leq r$ et $|P(z_0)| = \inf_{z\in\mathbf{C}}|P(z)|$

c- Supposons que P s'écrive $P(X)=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\, X^i$. Au changement de variable $z\mapsto z-z_0$ près on peut supposer que $z_0=0$.

i) Montrer que $\forall z\in\mathbf{C},\ 1\leq |1+\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\, z^i| \quad (\star)$, avec $b_k=a_k/a_0$.

ii) Montrer que $P(0)=0$.

Pour cela on supposera que $a_0\neq 0$ et on effectuera le changement de variable $z\mapsto z/\alpha$ dans $(\star)$, avec α un complexe non nul vérifiant $\alpha^k=-b_k$, k étant le plus petit entier supérieur ou égal à 2 tel que $b_n\neq 0$.

Problème : 4 Continuité des racines de polynômes

Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficents complexes.

a- Montrer que pour tout complexe γ il exite une racine α de P, telle que $|\alpha-\gamma|\leq |P(\gamma)|^{1/n}$

Soit $(P_m)_{m\in\mathbf{N}}$ une suite de polynômes unitaires de degré n qui tend vers P.

b- Montrer que pour toute racine α de P, il existe une suite de nombres complexes $(\alpha_m)_{m\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout m de $\mathbf{N}$, α_m est racine de P_m et la suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbf{N}}$ converge vers α.

c- Montrer que si $P(X)=(X-\lambda_1)...(X-\lambda_n)$ alors pour tout m de $\mathbf{N}$ on peut écrire $P_m(X)=(X-\lambda_{1,m})...(X-\lambda_{n,m})$ avec pour tout entier i compris entre 1 et n $(\lambda_{i,m})_{m\in\mathbf{N}}$ est une suite convergente vers λ_i.

Problème : 5 Soit $A\subset\mathbf{R}$. On note A' l'ensemble des points de $\mathbf{R}$ tels que pour tout voisinage V de x on a $(V\setminus\{x\})\cap A\neq\varnothing$. Par récurrence, on définit les ensembles $A^{[n]}=(A^{[n-1]})'$.

a- Montrer que $x\in A'$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_n$ de points de A différents de x qui converge vers x.

b- On considère un réel a et une partie non vide $B\subset[0;a]$. On pose $C=\{2^{-k}(a+t),\ t\in B,\ k\in\mathbf{N}\}$. Montrer que $C'=\{2^{-k}(a+t),\ t\in B',\ k\in\mathbf{N}\}\cup\{0\}$.

c- Montrer que si $B^{[n]}\neq\varnothing$ alors $C^{[n+1]}=\{2^{-k}(a+t),\ t\in B^{[n+1]},\ k\in\mathbf{N}\}\cup\{0\}$, et que si $B^{[n]}=\varnothing$ alors $C^{[n+1]}=\varnothing$.

d- Montrer par récurence que pour tout entier n il existe une partie B de $[0;a]$ telle que $B^{[n]}\neq\varnothing$