

Corrigé en janvier 2009

**Rapidité de convergence d'une suite réelle**

L'objectif de ce texte est de se donner des outils pour « mesurer » la rapidité de convergence d'une suite réelle  $(u_n)$  vers sa limite  $\ell$ . Pour cela on va comparer la suite  $|u_n - \ell|$  avec des suites bien connues convergeant vers 0, en particulier les suites géométriques. Pour comparer deux suites il est naturel de poser la définition suivante.

**Définition 0.1.** La suite  $(v_n)$  converge vers  $\ell$  plus vite que la suite  $(u_n)$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{v_n - \ell}{u_n - \ell} \right| = 0 .$$

**Exemple 0.2.** Supposons  $|k| < 1$  et  $a > 0$ . La suite géométrique  $(k^n)$  tend vers 0 plus vite que la suite  $(\frac{1}{n^a})$ .

**Remarque 1.** Il faut prendre garde au fait que cette définition (comme les outils que nous utiliserons dans la suite) est asymptotique. Si on prend dans l'exemple précédent  $k = 0.9$  et  $a = 1000$ , les premiers termes de la suite  $(\frac{1}{n^a})$  sont bien plus petits que ceux de la suite  $(k^n)$ . La calculatrice permet-elle de conjecturer le résultat annoncé ?

## 1. COMPARAISON AVEC UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Remarquons tout d'abord que pour une suite géométrique de raison  $k$  ( $v_n = Ck^n$ ) on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = k .$$

**Proposition 1.1.** Soit une suite  $(u_n)$  et  $\ell$  un réel tel que  $u_n \neq \ell$  pour tout  $n$ . On suppose de plus que

$$\text{la suite } \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right| \text{ converge vers } k .$$

Les différents cas ci-dessous peuvent se produire :

- si  $0 \leq k < 1$ , la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  ;
- si  $k > 1$ , la suite  $|u_n - \ell|$  tend vers  $+\infty$  ;
- si  $k = 1$ , on ne peut pas prévoir du comportement de la suite  $(u_n)$ .

*Démonstration.* • Supposons  $k \in [0, 1[$ . Soit  $\kappa$  un réel tel que  $k < \kappa < 1$ . Il existe alors  $N$  tel que

$$n \geq N \implies \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right| \leq \kappa ,$$

ce qui implique que, pour  $n \geq N$ , on a

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \kappa |u_n - \ell| .$$

Par conséquent pour tout  $p \in \mathbb{N}$  on a

$$|u_{N+p} - \ell| \leq \kappa^p |u_N - \ell| .$$

Puisque  $0 < \kappa < 1$ , la suite  $(u_{N+p})_{p \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\ell$  et donc la suite  $(u_n)$  tend vers  $\ell$ .

- Supposons  $k > 1$ . Soit  $\kappa$  un réel tel que  $1 < \kappa < k$ . Il existe alors  $N$  tel que

$$n \geq N \implies \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right| \geq \kappa ,$$

ce qui implique que pour  $n \geq N$  on a

$$|u_{n+1} - \ell| \geq \kappa |u_n - \ell| .$$

Par conséquent pour tout  $p \in \mathbb{N}$  on a

$$|u_{N+p} - \ell| \geq \kappa^p |u_N - \ell| .$$

Puisque  $\kappa > 1$ , la suite  $|(u_{N+p})_{p \in \mathbb{N}} - \ell|$  tend vers  $+\infty$ , ce qui implique le résultat.

• L'hypothèse de la proposition (avec  $k = 1$  et  $\ell = 0$ ) est vérifiée par la suite  $(\frac{1}{n^a})$ . Or cette suite converge vers  $\ell = 0$  pour  $a > 0$ , vers 1 pour  $a = 0$  et diverge (elle tend vers  $+\infty$ ) pour  $a < 0$ . La même hypothèse est vérifiée par la suite  $(-1)^n n$  qui diverge « encore plus » ! Ces exemples montrent que cette hypothèse ( $k = 1$ ) ne permet pas de prévoir le comportement de la suite  $(u_n)$ .  $\square$

En utilisant toujours une comparaison avec une suite géométrique on peut démontrer la proposition ci-dessous qui permet de comparer la vitesse de convergence de deux suites (voir ??).

**Proposition 1.2.** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergeant vers  $\ell$ . Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right| = k_1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{v_{n+1} - \ell}{v_n - \ell} \right| = k_2 \text{ avec } 0 \leq k_1 < k_2 .$$

Alors la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  plus vite que la suite  $(v_n)$ .

Il est alors naturel de poser la définition suivante :

**Définition 1.3.** Soit  $(u_n)$  une suite convergeant vers  $\ell$  et vérifiant de plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right| = k .$$

On dira que la convergence est

- lente si  $k = 1$  ;
- de type géométrique si  $0 < k < 1$  ;
- rapide si  $k = 0$ .

### Exemples de convergence lente

(1) La convergence de la suite  $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  vers  $e$  est lente car on vérifie (en utilisant un développement limité du logarithme au voisinage de 1) que

$$e - u_n = \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) .$$

(2) La convergence de la suite  $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$  vers la constante d'Euler  $\gamma$  est lente. Pour le montrer on peut considérer la suite

$$u_n = \gamma_n - \gamma_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) .$$

On a alors

$$u_n \sim -\frac{1}{2n^2} .$$

La série de terme général  $(u_n)$  a des termes de signe constant (négatif) à partir d'un certain rang. Comme la série de terme général  $\frac{1}{n^2}$  converge, la série de terme général  $(u_n)$  converge ce qui implique que la suite  $\gamma_n$  converge puisque

$$\sum_2^n u_n = \gamma_n - \gamma_1 .$$

De plus les restes des séries convergentes  $\sum u_n$  et  $\sum -\frac{1}{2n^2}$  sont équivalents par un résultat classique. D'où si  $\gamma$  désigne la limite de la suite  $\gamma_n$ .

$$\gamma - \gamma_n = \sum_{n+1}^{\infty} u_k \simeq \sum_{n+1}^{\infty} -\frac{1}{2k^2} .$$

En comparant cette série à des intégrales, on vérifie facilement que

$$\gamma - \gamma_n \simeq -\frac{1}{2n} ,$$

ce qui implique la convergence lente de  $\gamma_n$  vers  $\gamma$ .

(3) Un **exercice** (voir [G] page 208). Soit  $(u_n)$  une suite à termes strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{a}{n} + O(\frac{1}{n^2})} \text{ pour } n \rightarrow +\infty .$$

Il existe alors  $C > 0$  tel que  $u_n \sim \frac{C}{n^a}$  (voir la démonstration en ??).

On en déduit en particulier que la suite  $u_n$  converge vers 0 si  $a > 0$ , converge vers  $C$  si  $a = 0$  et tend vers  $+\infty$  si  $a < 0$ .

### Exemples de convergence rapide

(1) La convergence de la suite  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  vers  $e$  est rapide. On peut montrer que

$$0 \leq e - u_n \leq \frac{1}{n.n!} ,$$

mais aussi que

$$e - u_n \geq u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} .$$

On en déduit que

$$0 \leq \frac{e - u_{n+1}}{e - u_n} \leq \frac{1}{n+1} ,$$

ce qui implique la convergence rapide.

(2) La convergence de la suite  $u_n = Ck^{2^n}$  (où  $0 < k < 1$ ) vers 0 est rapide. En effet on

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = k^{2^n} \rightarrow 0 \text{ pour } n \rightarrow +\infty ;$$

On a plus précisément

$$\frac{u_{n+1}}{u_n^2} = \frac{1}{C} .$$

On dira dans ce cas que la convergence (rapide) est d'ordre 2 et on définit plus généralement la convergence d'ordre  $p \geq 1$  par

**Définition 1.4.** Soit  $p$  un réel supérieur ou égal à 1. On dit que la convergence de la suite  $(u_n)$  vers  $\ell$  est d'ordre  $p$  si

$$\text{la suite } \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{(u_n - \ell)^p} \right| \text{ converge vers une limite non nulle .}$$

Il est facile de vérifier que pour  $p > 1$  la convergence de la suite est rapide et que pour  $p = 1$  on retrouve les cas de convergence lente ou géométrique.

### Exemples de convergence de type géométrique

(1) La suite  $u_n = Cn^a k^n$  (avec  $0 < k < 1$  et  $a \in \mathbb{R}$  et  $C \in \mathbb{R}$ ) converge vers 0 avec une convergence de type géométrique, mais n'est une suite géométrique que dans le cas où  $a = 0$ .

(2) La suite  $u_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$  converge vers  $\pi$ . Sa convergence est de type géométrique car, en utilisant le développement limité de la fonction sinus au voisinage de 0 on obtient

$$u_n - \pi \sim -\frac{\pi^3}{4^n 6} .$$

On rappelle qu'il est possible de calculer cette suite par récurrence (sans utiliser la valeur de  $\pi$ ) et qu'elle s'obtient en utilisant la méthode d'Archimède pour approcher la surface d'un disque de rayon 1.

## 2. LE CAS DES SUITES RÉCURRENTES

On considère dans ce paragraphe une fonction  $f$  « suffisamment régulière » définie sur un intervalle compact  $I$  et vérifiant  $f(I) \subset I$ . On définit par récurrence une suite  $(u_n)$  en posant

$$u_0 \in I \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) .$$

**Proposition 2.1.** Supposons  $f$  dérivable sur  $I$  et  $|f'(x)| < 1$  pour  $x \in I$ . Alors la fonction  $f$  admet un unique point fixe  $\alpha$  sur  $I$  et la suite  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$ . Plus précisément on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} = f'(\alpha) .$$

La convergence de la suite  $(u_n)$  est donc de type géométrique si  $f'(\alpha) \neq 0$  et elle est rapide si  $f'(\alpha) = 0$ .

Cette proposition n'est rien d'autre qu'une des variantes du théorème du point fixe, que je ne redémontre pas ici. L'étude de la vitesse de convergence repose simplement sur le fait que

$$\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} = \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} ,$$

et que cette quantité tend vers  $f'(\alpha)$  puisque  $u_n$  converge vers  $\alpha$ .

On peut démontrer un résultat beaucoup plus précis (voir [O-V] page 227 et la démonstration en ??).

**Proposition 2.2.** Supposons  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$  et  $0 < f'(x) < 1$  pour tout  $x$  dans l'intervalle compact  $I$ . Soit  $\alpha$  l'unique point fixe de  $f$  sur  $I$ . Il existe alors une constante  $C > 0$  telle que

$$|u_n - \alpha| \sim C |f'(\alpha)|^n .$$

Lorsqu'on applique la méthode de NEWTON pour approcher une racine  $\alpha$  d'une équation de la forme  $\varphi(x) = 0$ , on transforme l'équation  $\varphi(x) = 0$  en une équation de la forme  $f(x) = x$  où  $f$  est choisie de sorte que  $f'(\alpha) = 0$ . Plus précisément on pose (sur un intervalle où la dérivée de  $\varphi$  ne s'annule pas)

$$f(x) = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)},$$

et on obtient, à condition que  $\varphi$  soit deux fois dérivable,

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)\varphi''(x)}{\varphi'(x)^2} \quad \text{d'où } f'(\alpha) = 0.$$

La méthode du point fixe appliqué à la fonction  $f$  donnera (pour peu que l'on parte suffisamment près de  $\alpha$ ) une suite  $(u_n)$  dont la convergence vers  $\alpha$  sera rapide. Si  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $\varphi''(\alpha) \neq 0$ , la convergence sera d'ordre 2. En effet (en utilisant une formule de Taylor à l'ordre 2 au point  $x$ ) on montre que

$$f(x) = \alpha + \frac{(\alpha - x)^2}{2} \frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'(x)} \quad \text{avec } \xi \text{ compris entre } \alpha \text{ et } x.$$

On en déduit que si la suite  $(u_n)$ , définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$ , converge vers  $\alpha$  alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} - \alpha}{(u_n - \alpha)^2} = \frac{1}{2} \frac{\varphi''(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}.$$

Ceci montre l'intérêt de la méthode de NEWTON.

Il est aussi possible de démontrer, dans le cas où  $f'(\alpha) = 0$ , un résultat donnant un équivalent de  $|u_n - \alpha|$  (voir [O-V] page 228).

### 3. ACCÉLÉRATION DE CONVERGENCE

*Attention au fait que cette notion ne figure plus dans l'intitulé de la leçon proposée par le jury du CAPES! Il n'est donc pas indispensable de développer cette partie; on peut même ne pas la traiter du tout pour peu qu'on ait traité des exemples consistants dans les deux premiers paragraphes.*

Accélérer la convergence d'une suite  $(u_n)$  vers sa limite  $\ell$  consiste à « fabriquer » à partir de la suite  $(u_n)$  (en général par des combinaisons linéaires de termes de  $(u_n)$ ) une suite  $(v_n)$  qui converge vers  $\ell$  plus vite que  $(u_n)$ . Nous allons ici nous intéresser à des procédés qui accélèrent des suites dont la convergence est de type géométrique (pour les suites rapides c'est moins indispensable et pour les suites lentes c'est plus délicat).

**3.1. Cas où l'on connaît la limite  $k$  de  $\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}$ .** Supposons que la convergence de type géométrique soit donné par le début d'un développement asymptotique.

$$u_n - \ell = Ck^n + o(k^n) \quad \text{avec } 0 < k < 1.$$

On obtient alors

$$u_{n+1} - ku_n = (1 - k)\ell + o(k^n),$$

ce qui implique que la suite  $v_n = \frac{u_{n+1} - ku_n}{1 - k}$  converge vers  $\ell$  plus vite que la suite  $(u_n)$ . Ceci suggère d'étudier la suite  $(v_n)$  dans une situation plus générale.

**Proposition 3.1** (Méthode de RICHARDSON). *On suppose que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  et que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} = k \quad \text{avec } 0 < k < 1 .$$

Alors la suite  $(v_n)$  définie par

$$v_n = \frac{u_{n+1} - k u_n}{1 - k} ,$$

converge vers  $\ell$  plus vite que la suite  $(u_n)$ .

*Démonstration.* Il suffit de traduire l'hypothèse par

$$u_{n+1} - \ell = (k + o(1))(u_n - \ell) \quad \text{où } o(1) \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } n \text{ tend vers } \infty .$$

On a alors

$$\frac{u_{n+1} - k u_n}{1 - k} - \ell = (u_n - \ell) o(1) ,$$

ce qui implique le résultat. □

On peut, par exemple appliquer cette méthode à la suite  $u_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$  (pour laquelle  $k = \frac{1}{4}$ ). La suite

$$v_n = \frac{u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4u_{n+1} - u_n}{3} ,$$

tend vers  $\pi$  plus vite que la suite  $(u_n)$ . On peut réitérer le procédé car en utilisant le développement limité de la fonction sinus en 0 on obtient que

$$v_n - \pi = \frac{c}{16^n} + o\left(\frac{1}{16^n}\right) \quad \text{où } c \text{ est une constante dont la valeur nous importe peu .}$$

Plus généralement, lorsqu'on dispose d'un développement asymptotique de la suite  $(u_n)$  de la forme

$$u_n = \ell + C_1 k_1^n + C_2 k_2^n + \dots + C_p k_p^n + o(k_p^n) \quad \text{où } k_p < k_{p-1} < \dots < k_1 < 1 ,$$

on peut réitérer le procédé  $p$  fois. C'est ce qui est formalisé dans la plupart des ouvrages d'analyse numérique ... mais l'obtention de tels développements asymptotiques s'obtiennent souvent avec la formule d'EULER-MAC LAURIN qui semble un peu difficile à établir dans le cadre de cette leçon. On peut même démontrer que la méthode de SIMPSON consiste à accélérer par ce procédé la suite obtenue par la méthode des trapèzes pour approcher une intégrale finie (voir par exemple [D] pages 80 à 86).

**3.2. Cas où l'on ne connaît pas  $k$ .** C'est le cas par exemple d'une suite récurrente convergente vers un point fixe  $\alpha$  d'une fonction  $f$ . Si  $f'(\alpha) \neq 0$ , on est dans une situation où l'on pourrait envisager d'appliquer la méthode de RICHARDSON mais, si on ne connaît pas  $\alpha$ , on ne connaît pas non plus  $f'(\alpha)$ .

**Lemme 3.2.** *Supposons que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  et que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} = k \quad \text{avec } 0 < k < 1 .$$

Alors la suite  $\delta_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}$  converge aussi vers  $k$ .

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que lorsque  $n$  tend vers l'infini on a (bien entendu on suppose que tous les dénominateurs sont non nuls)

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1} - \ell} = 1 + \frac{\ell - u_n}{u_{n+1} - \ell} \longrightarrow 1 - \frac{1}{k} .$$

De même

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{u_n - \ell} = 1 + \frac{\ell - u_{n-1}}{u_n - \ell} \longrightarrow 1 - \frac{1}{k} .$$

On en déduit que

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}} \times \frac{u_n - \ell}{u_{n+1} - \ell} \longrightarrow 1 ,$$

ce qui implique le lemme. □

*Attention le résultat presque analogue énoncé dans ([L] page 78) est faux.*

En remplaçant  $k$  par  $\delta_n$  dans la méthode de RICHARDSON, on peut aussi accélérer la suite  $(u_n)$ .

**Proposition 3.3** (Méthode d'AITKEN). *Supposons que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  et que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} = k \text{ avec } 0 < k < 1 .$$

*Posons*

$$\delta_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}} .$$

*Alors la suite*

$$v_n = \frac{u_{n+1} - \delta_n u_n}{1 - \delta_n}$$

*converge vers  $\ell$  plus vite que la suite  $(u_n)$ .*

*Démonstration.* Pour faire la démonstration on peut supposer  $\ell = 0$ . En effet ceci revient à remplacer la suite  $(u_n)$  par la suite  $(u_n - \ell)$  ce qui ne modifie pas  $\delta_n$  et conduit à remplacer la suite  $(v_n)$  par la suite  $(v_n - \ell)$ .

En utilisant la définition de  $\delta_n$  on obtient

$$v_n = \frac{u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1}}{2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}} .$$

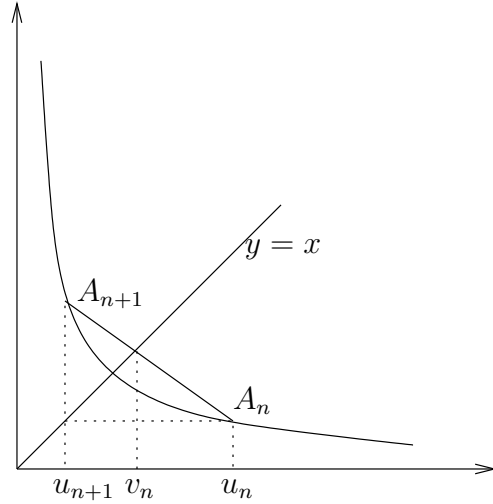
*Il n'est pas aisé de retenir cette formule... mais si on a compris l'utilisation du lemme pour définir  $(v_n)$ , on peut facilement la retrouver.* On obtient

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} \frac{u_n u_{n+1} \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n-1}}{u_n} \right)}{u_{n+1} \left( 2 \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n-1}}{u_{n+1}} - 1 \right)} = \frac{\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n-1}}{u_n}}{2 \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n-1}}{u_{n+1}} - 1} .$$

Le dénominateur de cette fraction tend vers  $2k - k^2 - 1 = -(k - 1)^2 \neq 0$ , et le numérateur tend vers  $k - k = 0$ . Par conséquent la suite  $(v_n)$  tend plus vite vers 0 que la suite  $(u_n)$ . □

Une jolie interprétation géométrique de la formule d'AITKEN dans le cas d'une suite récurrente (voir [L] page 81)

On suppose que  $(u_n)$  est une suite définie par la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Notons  $A_n$  le point de coordonnées  $(u_n, f(u_n))$ . On peut montrer (c'est un exercice facile) que le point de coordonnées  $(v_n, v_n)$  où la suite  $(v_n)$  est celle définie par le procédé d'AITKEN, est l'intersection de la droite d'équation  $y = x$  avec la droite  $(A_n A_{n+1})$ .



#### 4. ANNEXES

4.1. **Démonstration de la proposition ??.** Comme  $k_1$  est strictement inférieur à  $k_2$  par hypothèse, on peut choisir  $\varepsilon > 0$  tel que l'on ait

$$0 \leq k_1 < k_1 + \varepsilon < k_2 - \varepsilon < k_2 .$$

On suppose d'une part que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right| = k_1$ . Il existe donc un entier  $N_1$  tel que

$$n > N_1 \implies |u_{n+1} - \ell| \leq (k_1 + \varepsilon) |u_n - \ell| ,$$

On suppose d'autre part que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{v_{n+1} - \ell}{v_n - \ell} \right| = k_2$ . Il existe donc un entier  $N_2$  tel que

$$n > N_2 \implies |v_{n+1} - \ell| \geq (k_2 - \varepsilon) |v_n - \ell| .$$

Soit  $N = \max(N_1, N_2)$ . Par une récurrence rapide, on déduit des relations ci-dessus que pour tout entier  $p \geq 1$  on a

$$|u_{N+p} - \ell| \leq (k_1 + \varepsilon)^p |u_N - \ell| \quad \text{et} \quad |v_{N+p} - \ell| \geq (k_2 - \varepsilon)^p |v_N - \ell| ,$$

ce qui implique

$$\left| \frac{u_{N+p} - \ell}{v_{N+p} - \ell} \right| \leq \left( \frac{k_1 + \varepsilon}{k_2 - \varepsilon} \right)^p .$$

Comme  $0 < \frac{k_1 + \varepsilon}{k_2 - \varepsilon} < 1$  on en déduit que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{N+p} - \ell}{v_{N+p} - \ell} \right| = 0 ,$$

ce qui implique que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  plus vite que la suite  $v_n$ . □

**4.2. Solution de l'exercice (exemple de convergence lente (3)).** On suppose que  $(u_n)$  est une suite à termes strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} .$$

On veut démontrer que la suite de terme général  $n^a u_n$  est convergente. Pour cela on considère la suite  $(v_n)$  définie par

$$v_n = \ln(n^a u_n) ,$$

qui est bien définie puisqu'on a supposé  $u_n > 0$  pour tout  $n$ . L'idée consiste à remarquer qu'il est équivalent d'étudier la convergence de la suite  $(v_n)$  ou de la série de terme général  $w_n = v_n - v_{n-1}$  pour  $n \geq 1$  car on peut écrire

$$v_n = (v_n - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_{n-2}) + \dots + (v_1 - v_0) + v_0 .$$

En utilisant l'hypothèse, on obtient pour  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} w_{n+1} = v_{n+1} - v_n &= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^a\right) + \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} \\ &= a \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) . \end{aligned}$$

Or on sait que

$$\ln(1+x) = 1+x + O(x^2) \text{ pour } x \text{ tendant vers } 0 .$$

On en déduit que

$$w_{n+1} = \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

En d'autres termes il existe une constante  $\lambda$  telle que

$$|w_{n+1}| \leq \lambda \frac{1}{n^2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} ,$$

ce qui implique que la série de terme général  $w_n$  est absolument convergente et donc converge vers un réel  $c$ . On en conclut que la suite  $v_n$  converge vers  $c$  et donc que la suite  $(n^a u_n)$  converge vers  $e^c$  qui est une constante  $C > 0$ . On a bien démontré que

$$u_n \sim \frac{C}{n^a} .$$

□

**4.3. Démonstration de la proposition ??.** Il s'agit de démontrer que la suite  $(v_n)$  définie par

$$v_n = \frac{|u_n - \alpha|}{|f'(\alpha)|^n}$$

converge vers un nombre  $C$  strictement positif. L'idée consiste à étudier la suite  $(\ln v_n)$  en la considérant comme une série car on peut écrire

$$\ln v_n = \ln \frac{v_n}{v_{n-1}} + \ln \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}} + \dots + \ln \frac{v_2}{v_1} + \ln \frac{v_1}{v_0} + \ln v_0 .$$

On va démontrer que cette série est absolument convergente en majorant son terme général.

Rappelons qu'en utilisant le théorème des accroissements finis on vérifie par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha| \quad \text{où } k = \sup_{x \in I} |f'(x)|$$

et rappelons que nous avons supposé  $0 < k < 1$ .

Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'intervalle  $I$  on peut écrire, grâce à la formule de TAYLOR,

$$f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha)f'(\alpha) + (x - \alpha)^2 g(x) \quad (x \in I),$$

où  $x \mapsto g(x)$  est une fonction continue sur l'intervalle  $I$ . Plus précisément la fonction  $g$  est continue au point  $\alpha$  car sa limite en  $\alpha$  est égale à  $\frac{1}{2}f''(\alpha)$  (il est évident qu'elle est continue sur  $I \setminus \{\alpha\}$ ). Puisque  $u_{n+1} = f(u_n)$  et que  $f(\alpha) = \alpha$  on a alors

$$u_{n+1} - \alpha = (u_n - \alpha)f'(\alpha) \left( 1 + (u_n - \alpha) \frac{g(u_n)}{f'(\alpha)} \right).$$

Introduisons la constante

$$M = \sup_{x \in I} \left| \frac{g(x)}{f'(a)} \right|,$$

qui est finie puisque  $g$  est continue sur le compact  $I$  et  $f'(\alpha)$  supposé non nul. On a alors

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left| \frac{u_{n+1} - \alpha}{f'(\alpha)(u_n - \alpha)} \right| = 1 + (u_n - \alpha) \frac{g(u_n)}{f'(\alpha)}.$$

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|t| \leq \delta \implies \frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+t)}{t} \leq \frac{3}{2} \implies |\ln(1+t)| \leq \frac{3}{2} |t|.$$

Or la suite  $\left( (u_n - \alpha) \frac{g(u_n)}{f'(\alpha)} \right)$  converge vers 0 car sa valeur absolue est majorée par  $Mk^n |u_0 - \alpha|$ . Par conséquent il existe un entier  $N$  tel que

$$n > N \implies \left| (u_n - \alpha) \frac{g(u_n)}{f'(\alpha)} \right| \leq \delta.$$

On obtient alors pour  $n > N$

$$\left| \ln \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| \leq \frac{3}{2} \left| (u_n - \alpha) \frac{g(u_n)}{f'(\alpha)} \right| \leq \frac{3}{2} M |u_0 - \alpha| k^n.$$

Ceci prouve que la série de terme général  $\ln \frac{v_{n+1}}{v_n}$  est absolument convergente puisqu'elle est majorée par une série géométrique de raison strictement inférieure à 1. Cette série est donc convergente ce qui implique la convergence de la suite  $(\ln v_n)$ . Si on appelle  $c$  sa limite, on en déduit que la suite  $(v_n)$  converge vers le réel strictement positif  $C = e^c$ .  $\square$

## 5. BIBLIOGRAPHIE

[D] J-P. DEMAILLY, Analyse numérique et équations différentielles

[G] X. GOURDON, Les maths en tête : analyse

[L] T. LAMBRE, Analyse pour l'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES

[O-V] J-L. OVAERT & J-L. VERLEY, Analyse avec commentaires et notes historiques

Sur l'accélération de convergence, on pourra lire l'article *calcul numérique* de l'Encyclopaedia Universalis dont les auteurs sont J-L. OVAERT & J-L. VERLEY.