

*Sur diverses constructions de bases parfaites dans
les représentations d'un groupe classique*

Rencontre Algèbre Poitiers Tours

Problématique générale

- Algèbre de Lie \mathfrak{g} simple complexe de dimension finie.
- Décomposition triangulaire $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$.
- Racines simples $\{\alpha_i \mid i \in I\}$.
- Vecteurs de racines simples $e_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$.
- Matrice de Cartan $A = (a_{ij})$, où $a_{ij} = \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle$.

Présentation de $U(\mathfrak{n}^+)$: générateurs e_i soumis aux relations

$$\sum_{p+q=1-a_{ij}} (-1)^p \frac{e_i^p}{p!} e_j \frac{e_i^q}{q!} = 0.$$

Problème

Construire une base de $U(\mathfrak{n}^+)$ à partir de ces seules données.

Problématique générale

- Algèbre de Lie \mathfrak{g} simple complexe de dimension finie.
- Décomposition triangulaire $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$.
- Racines simples $\{\alpha_i \mid i \in I\}$.
- Vecteurs de racines simples $e_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$.
- Matrice de Cartan $A = (a_{ij})$, où $a_{ij} = \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle$.

Présentation de $U(\mathfrak{n}^+)$: générateurs e_i soumis aux relations

$$\sum_{p+q=1-a_{ij}} (-1)^p \frac{e_i^p}{p!} e_j \frac{e_i^q}{q!} = 0.$$

Problème

Construire une base de $U(\mathfrak{n}^+)$ à partir de ces seules données.

Problématique générale

- Algèbre de Lie \mathfrak{g} simple complexe de dimension finie.
- Décomposition triangulaire $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$.
- Racines simples $\{\alpha_i \mid i \in I\}$.
- Vecteurs de racines simples $e_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$.
- Matrice de Cartan $A = (a_{ij})$, où $a_{ij} = \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle$.

Présentation de $U(\mathfrak{n}^+)$: générateurs e_i soumis aux relations

$$\sum_{p+q=1-a_{ij}} (-1)^p \frac{e_i^p}{p!} e_j \frac{e_i^q}{q!} = 0.$$

Problème

Construire une base de $U(\mathfrak{n}^+)$ à partir de ces seules données.

Une solution : bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

- W le groupe de Weyl, $s_j \in W$ réflexion simple, w_0 élément le plus long, $L = \ell(w_0)$.
- $\mathcal{X} = \{\mathbf{i} \mid s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_L} \text{ écriture réduite de } w_0\}$.
- Fixons $\mathbf{i} \in \mathcal{X}$:
 - énumération des racines positives

$$\beta_1 = \alpha_{i_1}, \quad \beta_2 = s_{i_1}(\alpha_{i_2}), \quad \beta_3 = s_{i_1} s_{i_2}(\alpha_{i_3}), \quad \dots$$

- normalisation des vecteurs de racines $E_{\beta_j} \in \mathfrak{g}^{\beta_j}$,
- famille des monômes PBW

$$E_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n})} = \prod_{j=1}^L \frac{E_{\beta_j}^{n_j}}{n_j!} \quad \text{où } \mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_L) \in \mathbb{N}^L.$$

Une solution : bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

- W le groupe de Weyl, $s_j \in W$ réflexion simple, w_0 élément le plus long, $L = \ell(w_0)$.
- $\mathcal{X} = \{\mathbf{i} \mid s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_L} \text{ écriture réduite de } w_0\}$.
- Fixons $\mathbf{i} \in \mathcal{X}$:
 - énumération des racines positives

$$\beta_1 = \alpha_{i_1}, \quad \beta_2 = s_{i_1}(\alpha_{i_2}), \quad \beta_3 = s_{i_1} s_{i_2}(\alpha_{i_3}), \quad \dots$$

- normalisation des vecteurs de racines $E_{\beta_j} \in \mathfrak{g}^{\beta_j}$,
- famille des monômes PBW

$$E_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n})} = \prod_{j=1}^L \frac{E_{\beta_j}^{n_j}}{n_j!} \quad \text{où } \mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_L) \in \mathbb{N}^L.$$

Une solution : bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

- W le groupe de Weyl, $s_j \in W$ réflexion simple, w_0 élément le plus long, $L = \ell(w_0)$.
- $\mathcal{X} = \{\mathbf{i} \mid s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_L} \text{ écriture réduite de } w_0\}$.
- Fixons $\mathbf{i} \in \mathcal{X}$:
 - énumération des racines positives

$$\beta_1 = \alpha_{i_1}, \quad \beta_2 = s_{i_1}(\alpha_{i_2}), \quad \beta_3 = s_{i_1} s_{i_2}(\alpha_{i_3}), \quad \dots$$

- normalisation des vecteurs de racines $E_{\beta_j} \in \mathfrak{g}^{\beta_j}$,
- famille des monômes PBW

$$E_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n})} = \prod_{j=1}^L \frac{E_{\beta_j}^{n_j}}{n_j!} \quad \text{où } \mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_L) \in \mathbb{N}^L.$$

Une solution : bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

- W le groupe de Weyl, $s_j \in W$ réflexion simple, w_0 élément le plus long, $L = \ell(w_0)$.
- $\mathcal{X} = \{\mathbf{i} \mid s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_L} \text{ écriture réduite de } w_0\}$.
- Fixons $\mathbf{i} \in \mathcal{X}$:
 - énumération des racines positives

$$\beta_1 = \alpha_{i_1}, \quad \beta_2 = s_{i_1}(\alpha_{i_2}), \quad \beta_3 = s_{i_1} s_{i_2}(\alpha_{i_3}), \quad \dots$$

- normalisation des vecteurs de racines $E_{\beta_j} \in \mathfrak{g}^{\beta_j}$,
- famille des monômes PBW

$$E_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n})} = \prod_{j=1}^L \frac{E_{\beta_j}^{n_j}}{n_j!} \quad \text{où } \mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_L) \in \mathbb{N}^L.$$

Une solution : bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Fait bien connu

À $\mathbf{i} \in \mathcal{X}$ fixé, $\{E_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n})} \mid \mathbf{n} \in \mathbb{N}^L\}$ est une base de $U(\mathfrak{n}^+)$.

Inconvénient

Soit V une représentation simple de \mathfrak{g} , soit $\xi \in V$ un vecteur de plus bas poids. L'image de la base par

$$U(\mathfrak{n}^+) \rightarrow V, \quad X \mapsto X \cdot \xi$$

engendre V . Comment extraire une base ?

Une solution : bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Fait bien connu

À $\mathbf{i} \in \mathcal{X}$ fixé, $\{E_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n})} \mid \mathbf{n} \in \mathbb{N}^L\}$ est une base de $U(\mathfrak{n}^+)$.

Inconvénient

Soit V une représentation simple de \mathfrak{g} , soit $\xi \in V$ un vecteur de plus bas poids. L'image de la base par

$$U(\mathfrak{n}^+) \rightarrow V, \quad X \mapsto X \cdot \xi$$

engendre V . Comment extraire une base ?

Notations

- Anti-automorphisme involutif $*$ de $U(\mathfrak{n}^+)$:

$$(e_{i_1} e_{i_2} e_{i_3} \cdots)^* = \cdots e_{i_3} e_{i_2} e_{i_1}.$$

- $Q_+ = \left\{ \sum_{i \in I} p_i \alpha_i \mid p_i \in \mathbb{N} \right\}$.

Définition de « base de type canonique »

Nous dirons qu'une base \mathbf{B} de $U = U(\mathfrak{n}^+)$ est **de type canonique** si :

1. \mathbf{B} formée de vecteurs de poids ; $1 \in \mathbf{B}$.
2. Chaque idéal $e_i^p U$ est un sous-espace de coordonnées
 $\rightsquigarrow \mathbf{B}$ induit une base dans chaque $e_i^p U / e_i^{p+1} U$.
3. Dans les bases induites,

$$\text{Mult}_{e_i/(p+1)} : e_i^p U / e_i^{p+1} U \rightarrow e_i^{p+1} U / e_i^{p+2} U$$

est donné par une matrice de permutation.

4. \mathbf{B} est stable par $*$.

Définition de « base de type canonique »

Nous dirons qu'une base \mathbf{B} de $U = U(\mathfrak{n}^+)$ est **de type canonique** si :

1. \mathbf{B} formée de vecteurs de poids ; $1 \in \mathbf{B}$.
2. Chaque idéal $e_i^p U$ est un sous-espace de coordonnées
 $\rightsquigarrow \mathbf{B}$ induit une base dans chaque $e_i^p U / e_i^{p+1} U$.
3. Dans les bases induites,

$$\text{Mult}_{e_i/(p+1)} : e_i^p U / e_i^{p+1} U \rightarrow e_i^{p+1} U / e_i^{p+2} U$$

est donné par une matrice de permutation.

4. \mathbf{B} est stable par $*$.

Définition de « base de type canonique »

Nous dirons qu'une base \mathbf{B} de $U = U(\mathfrak{n}^+)$ est **de type canonique** si :

1. \mathbf{B} formée de vecteurs de poids ; $1 \in \mathbf{B}$.
2. Chaque idéal $e_i^p U$ est un sous-espace de coordonnées
 $\rightsquigarrow \mathbf{B}$ induit une base dans chaque $e_i^p U / e_i^{p+1} U$.
3. Dans les bases induites,

$$\text{Mult}_{e_i/(p+1)} : e_i^p U / e_i^{p+1} U \rightarrow e_i^{p+1} U / e_i^{p+2} U$$

est donné par une matrice de permutation.

4. \mathbf{B} est stable par $*$.

Définition de « base de type canonique »

Nous dirons qu'une base \mathbf{B} de $U = U(\mathfrak{n}^+)$ est **de type canonique** si :

1. \mathbf{B} formée de vecteurs de poids ; $1 \in \mathbf{B}$.
2. Chaque idéal $e_i^p U$ est un sous-espace de coordonnées
 $\rightsquigarrow \mathbf{B}$ induit une base dans chaque $e_i^p U / e_i^{p+1} U$.
3. Dans les bases induites,

$$\text{Mult}_{e_i/(p+1)} : e_i^p U / e_i^{p+1} U \rightarrow e_i^{p+1} U / e_i^{p+2} U$$

est donné par une matrice de permutation.

4. \mathbf{B} est stable par $*$.

Utilité de la notion

- Soit $\xi \in V$ vecteur de plus bas poids, disons λ , dans V représentation simple. Alors

$$\ker(X \mapsto X \cdot \xi) = \sum_{i \in I} Ue_i^{1 - \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle}$$

est un sous-espace de coordonnées pour \mathbf{B} , donc \mathbf{B} induit une base de $U / \ker \dots \cong V$.

- Cette base de V est formée de vecteurs de poids et est compatible avec les sous-espaces $e_i^p V$.
- (Kashiwara) Les sous-modules de Demazure de V sont des sous-espaces de coordonnées pour cette base.

Utilité de la notion

- Soit $\xi \in V$ vecteur de plus bas poids, disons λ , dans V représentation simple. Alors

$$\ker(X \mapsto X \cdot \xi) = \sum_{i \in I} Ue_i^{1 - \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle}$$

est un sous-espace de coordonnées pour \mathbf{B} , donc \mathbf{B} induit une base de $U / \ker \cdots \cong V$.

- Cette base de V est formée de vecteurs de poids et est compatible avec les sous-espaces $e_i^p V$.
- (Kashiwara) Les sous-modules de Demazure de V sont des sous-espaces de coordonnées pour cette base.

Exemple : type A_2

$$I = \{1, 2\}$$



Une seule base de type canonique :

$$\mathbf{B} = \left\{ e_1^{(p)} e_2^{(q)} e_1^{(r)} \mid q \geq p + r \right\} \cup \left\{ e_2^{(r)} e_1^{(q)} e_2^{(p)} \mid q \geq p + r \right\},$$

où $e_i^{(p)} = e_i^p / p!$.

Structure combinatoire sur \mathbf{B}

- décomposition selon les poids : $\mathbf{B} = \bigsqcup_{\nu \in Q_+} \mathbf{B}_\nu$.

et pour chaque $i \in I$:

- une fonction $\varphi_i : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{N}$, $b \mapsto \max\{p \mid b \in e_i^p U\}$;
ainsi la base induite par \mathbf{B} dans $e_i^p U / e_i^{p+1} U$ est
l'image des $b \in \mathbf{B}$ tels que $\varphi_i(b) = p$.
- des bijections

$$\tilde{e}_i : \{b \in \mathbf{B} \mid \varphi_i(b) = p\} \rightarrow \{b \in \mathbf{B} \mid \varphi_i(b) = p + 1\}$$

induites par

$$\text{Mult}_{e_i/(p+1)} : e_i^p U / e_i^{p+1} U \rightarrow e_i^{p+1} U / e_i^{p+2} U.$$

Structure combinatoire sur \mathbf{B}

- décomposition selon les poids : $\mathbf{B} = \bigsqcup_{\nu \in Q_+} \mathbf{B}_\nu$.

et pour chaque $i \in I$:

- une fonction $\varphi_i : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{N}$, $b \mapsto \max\{p \mid b \in e_i^p U\}$;
ainsi la base induite par \mathbf{B} dans $e_i^p U / e_i^{p+1} U$ est
l'image des $b \in \mathbf{B}$ tels que $\varphi_i(b) = p$.
- des bijections

$$\tilde{e}_i : \{b \in \mathbf{B} \mid \varphi_i(b) = p\} \rightarrow \{b \in \mathbf{B} \mid \varphi_i(b) = p + 1\}$$

induites par

$$\text{Mult}_{e_i/(p+1)} : e_i^p U / e_i^{p+1} U \rightarrow e_i^{p+1} U / e_i^{p+2} U.$$

Structure combinatoire sur \mathbf{B}

- décomposition selon les poids : $\mathbf{B} = \bigsqcup_{\nu \in Q_+} \mathbf{B}_\nu$.

et pour chaque $i \in I$:

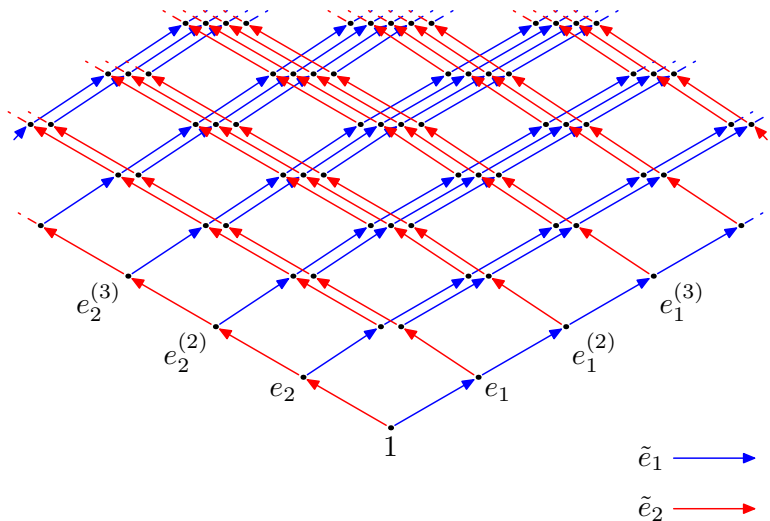
- une fonction $\varphi_i : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{N}$, $b \mapsto \max\{p \mid b \in e_i^p U\}$;
ainsi la base induite par \mathbf{B} dans $e_i^p U / e_i^{p+1} U$ est
l'image des $b \in \mathbf{B}$ tels que $\varphi_i(b) = p$.
- des bijections

$$\tilde{e}_i : \{b \in \mathbf{B} \mid \varphi_i(b) = p\} \rightarrow \{b \in \mathbf{B} \mid \varphi_i(b) = p + 1\}$$

induites par

$$\text{Mult}_{e_i/(p+1)} : e_i^p U / e_i^{p+1} U \rightarrow e_i^{p+1} U / e_i^{p+2} U.$$

Structure combinatoire : type A_2



Unicité de la structure combinatoire

Théorème (Berenstein-Kazhdan, 2006)

Soient B et B' deux bases de type canonique de U . Alors il existe une unique bijection $B \rightarrow B'$ préservant la structure combinatoire. Cette bijection commute à l'involution $*$.

Définition

Cristal de Kashiwara $B(-\infty)$ = cette structure combinatoire commune.

Toutes les bases de type canonique sont indexées par $B(-\infty)$.

Unicité de la structure combinatoire

Théorème (Berenstein-Kazhdan, 2006)

Soient B et B' deux bases de type canonique de U . Alors il existe une unique bijection $B \rightarrow B'$ préservant la structure combinatoire. Cette bijection commute à l'involution $*$.

Définition

Cristal de Kashiwara $B(-\infty)$ = cette structure combinatoire commune.

Toutes les bases de type canonique sont indexées par $B(-\infty)$.

Buts du reste de l'exposé

- Présenter trois constructions de bases de type canonique.
- Donner leurs propriétés-clés.
- Associer à chaque $b \in B(-\infty)$ son **polytope MV**.
- Observer que ce polytope apparaît naturellement dans chaque construction de base de type canonique.
- Expliquer comment les bases données par les deux premières constructions peuvent être comparées.

Propriétés de la base canonique

- Construite par Lusztig en 1990 ; redécouverte différemment par Kashiwara en 1991.
- S'étend au cas \mathfrak{g} algèbre de Kac-Moody symétrisable.
- Caractérisation algébrique dans le cadre des groupes quantiques.
- **Théorie de type Kazhdan-Lusztig : calculable par un algorithme.**
- Interprétation agréable dans la catégorification de Khovanov-Lauda-Rouquier (Varagnolo-Vasserot).

Définition de la base canonique

- $U_q(\mathfrak{n}^+)$: une $\mathbb{C}(q)$ -algèbre qui déforme $U(\mathfrak{n}^+)$.
- Automorphisme barre : $\bar{e}_i = e_i, \bar{q} = q^{-1}$.

Fixons $\mathbf{i} \in \mathcal{X}$:

- énumération $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L$ des racines positives,
- base PBW $E_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n})}$ de $U_q(\mathfrak{n}^+)$, où $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^L$,
- un ordre $\leq_{\mathbf{i}}$ sur \mathbb{N}^L :

$$\mathbf{m} \underset{\mathbf{i}}{\geq} \mathbf{n} \iff \begin{cases} \sum_{k=1}^L m_k \beta_k = \sum_{k=1}^L n_k \beta_k, \\ m_1 \geq n_1, \\ m_2 - a_{i_2, i_1} m_1 \geq n_2 - a_{i_2, i_1} n_1, \\ \dots \end{cases}$$

Définition de la base canonique

- $U_q(\mathfrak{n}^+)$: une $\mathbb{C}(q)$ -algèbre qui déforme $U(\mathfrak{n}^+)$.
- Automorphisme barre : $\bar{e}_i = e_i$, $\bar{q} = q^{-1}$.

Fixons $\mathbf{i} \in \mathcal{X}$:

- énumération $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L$ des racines positives,
- base PBW $E_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n})}$ de $U_q(\mathfrak{n}^+)$, où $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^L$,
- un ordre $\leq_{\mathbf{i}}$ sur \mathbb{N}^L :

$$\mathbf{m} \underset{\mathbf{i}}{\geq} \mathbf{n} \iff \begin{cases} \sum_{k=1}^L m_k \beta_k = \sum_{k=1}^L n_k \beta_k, \\ m_1 \geq n_1, \\ m_2 - a_{i_2, i_1} m_1 \geq n_2 - a_{i_2, i_1} n_1, \\ \dots \end{cases}$$

Définition de la base canonique

- $U_q(\mathfrak{n}^+)$: une $\mathbb{C}(q)$ -algèbre qui déforme $U(\mathfrak{n}^+)$.
- Automorphisme barre : $\bar{e}_i = e_i$, $\bar{q} = q^{-1}$.

Fixons $\mathbf{i} \in \mathcal{X}$:

- énumération $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L$ des racines positives,
- base PBW $E_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n})}$ de $U_q(\mathfrak{n}^+)$, où $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^L$,
- un ordre $\leq_{\mathbf{i}}$ sur \mathbb{N}^L :

$$\mathbf{m} \underset{\mathbf{i}}{\geq} \mathbf{n} \iff \begin{cases} \sum_{k=1}^L m_k \beta_k = \sum_{k=1}^L n_k \beta_k, \\ m_1 \geq n_1, \\ m_2 - a_{i_2, i_1} m_1 \geq n_2 - a_{i_2, i_1} n_1, \\ \dots \end{cases}$$

Définition de la base canonique

- $U_q(\mathfrak{n}^+)$: une $\mathbb{C}(q)$ -algèbre qui déforme $U(\mathfrak{n}^+)$.
- Automorphisme barre : $\bar{e}_i = e_i$, $\bar{q} = q^{-1}$.

Fixons $\mathbf{i} \in \mathcal{X}$:

- énumération $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L$ des racines positives,
- base PBW $E_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n})}$ de $U_q(\mathfrak{n}^+)$, où $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^L$,
- un ordre $\leq_{\mathbf{i}}$ sur \mathbb{N}^L :

$$\mathbf{m} \underset{\mathbf{i}}{\geq} \mathbf{n} \iff \begin{cases} \sum_{k=1}^L m_k \beta_k = \sum_{k=1}^L n_k \beta_k, \\ m_1 \geq n_1, \\ m_2 - a_{i_2, i_1} m_1 \geq n_2 - a_{i_2, i_1} n_1, \\ \dots \end{cases}$$

Définition de la base canonique

- On montre que la « matrice » de barre dans la base PBW est unitriangulaire inférieure.
- D'où une unique famille d'éléments

$$b(\mathbf{i}, \mathbf{n}) = E_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n})} + \sum_{\substack{\mathbf{m} \geq \mathbf{n} \\ \mathbf{i}}} c_{\mathbf{m}}(\mathbf{i}, \mathbf{n}) E_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{m})}$$

tels que $b(\mathbf{i}, \mathbf{n}) = \overline{b(\mathbf{i}, \mathbf{n})}$ et $c_{\mathbf{m}}(\mathbf{i}, \mathbf{n}) \in q\mathbb{Z}[q]$.

Théorème (Lusztig, 1990)

1. La base $\mathbf{B} = \{b(\mathbf{i}, \mathbf{n}) \mid \mathbf{n} \in \mathbb{N}^L\}$ de $U_q(\mathfrak{n}^+)$ ne dépend pas du choix de \mathbf{i} .
2. Elle est de type canonique : **base canonique**.

Définition de la base canonique

- On montre que la « matrice » de barre dans la base PBW est unitriangulaire inférieure.
- D'où une unique famille d'éléments

$$b(\mathbf{i}, \mathbf{n}) = E_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n})} + \sum_{\substack{\mathbf{m} \geq \mathbf{n} \\ \mathbf{i}}} c_{\mathbf{m}}(\mathbf{i}, \mathbf{n}) E_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{m})}$$

tels que $b(\mathbf{i}, \mathbf{n}) = \overline{b(\mathbf{i}, \mathbf{n})}$ et $c_{\mathbf{m}}(\mathbf{i}, \mathbf{n}) \in q\mathbb{Z}[q]$.

Théorème (Lusztig, 1990)

1. La base $\mathbf{B} = \{b(\mathbf{i}, \mathbf{n}) \mid \mathbf{n} \in \mathbb{N}^L\}$ de $U_q(\mathfrak{n}^+)$ ne dépend pas du choix de \mathbf{i} .
2. Elle est de type canonique : **base canonique**.

Définition de la base canonique

- On montre que la « matrice » de barre dans la base PBW est unitriangulaire inférieure.
- D'où une unique famille d'éléments

$$b(\mathbf{i}, \mathbf{n}) = E_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n})} + \sum_{\substack{\mathbf{m} \geq \mathbf{n} \\ \mathbf{i}}} c_{\mathbf{m}}(\mathbf{i}, \mathbf{n}) E_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{m})}$$

tels que $b(\mathbf{i}, \mathbf{n}) = \overline{b(\mathbf{i}, \mathbf{n})}$ et $c_{\mathbf{m}}(\mathbf{i}, \mathbf{n}) \in q\mathbb{Z}[q]$.

Théorème (Lusztig, 1990)

1. La base $\mathbf{B} = \{b(\mathbf{i}, \mathbf{n}) \mid \mathbf{n} \in \mathbb{N}^L\}$ de $U_q(\mathfrak{n}^+)$ ne dépend pas du choix de \mathbf{i} .
2. Elle est de type canonique : **base canonique**.

Polytope MV

- $\mathbf{i} \in \mathcal{X} \rightsquigarrow$ bijection $\mathbf{n} \mapsto b(\mathbf{i}, \mathbf{n})$ de \mathbb{N}^L sur \mathbf{B} .
- Par inversion, bijection $b \mapsto \mathbf{n}(\mathbf{i}, b)$ de $B(-\infty)$ sur \mathbb{N}^L .

Manière géométrique d'assembler ces données numériques :

$b \in B(-\infty) \mapsto \text{Pol}(b) \subseteq \mathfrak{h}^*$, le **polytope MV** de b .

- Points extrémaux $\mu_w(b)$ indexés par $w \in W$.
- $\mu_1(b) = 0$, $\mu_{w_0}(b) =$ poids de b .
- Arête entre $\mu_w(b)$ et $\mu_{ws_i}(b)$, pour $w \in W$ et $i \in I$.
- $\mathbf{i} \in \mathcal{X} \rightsquigarrow$ chemin de $\mu_1(b)$ à $\mu_{w_0}(b)$; les arêtes sont $n_1\beta_1, n_2\beta_2, \dots, n_L\beta_L$, où $(n_1, n_2, \dots, n_L) = \mathbf{n}(\mathbf{i}, b)$.

Polytope MV

- $\mathbf{i} \in \mathcal{X} \rightsquigarrow$ bijection $\mathbf{n} \mapsto b(\mathbf{i}, \mathbf{n})$ de \mathbb{N}^L sur \mathbf{B} .
- Par inversion, bijection $b \mapsto \mathbf{n}(\mathbf{i}, b)$ de $B(-\infty)$ sur \mathbb{N}^L .

Manière géométrique d'assembler ces données numériques :

$b \in B(-\infty) \mapsto \text{Pol}(b) \subseteq \mathfrak{h}^*$, le **polytope MV** de b .

- Points extrémaux $\mu_w(b)$ indexés par $w \in W$.
- $\mu_1(b) = 0$, $\mu_{w_0}(b) =$ poids de b .
- Arête entre $\mu_w(b)$ et $\mu_{ws_i}(b)$, pour $w \in W$ et $i \in I$.
- $\mathbf{i} \in \mathcal{X} \rightsquigarrow$ chemin de $\mu_1(b)$ à $\mu_{w_0}(b)$; les arêtes sont $n_1\beta_1, n_2\beta_2, \dots, n_L\beta_L$, où $(n_1, n_2, \dots, n_L) = \mathbf{n}(\mathbf{i}, b)$.

Polytope MV

- $\mathbf{i} \in \mathcal{X} \rightsquigarrow$ bijection $\mathbf{n} \mapsto b(\mathbf{i}, \mathbf{n})$ de \mathbb{N}^L sur \mathbf{B} .
- Par inversion, bijection $b \mapsto \mathbf{n}(\mathbf{i}, b)$ de $B(-\infty)$ sur \mathbb{N}^L .

Manière géométrique d'assembler ces données numériques :

$b \in B(-\infty) \mapsto \text{Pol}(b) \subseteq \mathfrak{h}^*$, le **polytope MV** de b .

- Points extrémaux $\mu_w(b)$ indexés par $w \in W$.
- $\mu_1(b) = 0$, $\mu_{w_0}(b) =$ poids de b .
- Arête entre $\mu_w(b)$ et $\mu_{ws_i}(b)$, pour $w \in W$ et $i \in I$.
- $\mathbf{i} \in \mathcal{X} \rightsquigarrow$ chemin de $\mu_1(b)$ à $\mu_{w_0}(b)$; les arêtes sont $n_1\beta_1, n_2\beta_2, \dots, n_L\beta_L$, où $(n_1, n_2, \dots, n_L) = \mathbf{n}(\mathbf{i}, b)$.

Polytope MV

- $\mathbf{i} \in \mathcal{X} \rightsquigarrow$ bijection $\mathbf{n} \mapsto b(\mathbf{i}, \mathbf{n})$ de \mathbb{N}^L sur \mathbf{B} .
- Par inversion, bijection $b \mapsto \mathbf{n}(\mathbf{i}, b)$ de $B(-\infty)$ sur \mathbb{N}^L .

Manière géométrique d'assembler ces données numériques :

$b \in B(-\infty) \mapsto \text{Pol}(b) \subseteq \mathfrak{h}^*$, le **polytope MV** de b .

- Points extrémaux $\mu_w(b)$ indexés par $w \in W$.
- $\mu_1(b) = 0$, $\mu_{w_0}(b) =$ poids de b .
- Arête entre $\mu_w(b)$ et $\mu_{ws_i}(b)$, pour $w \in W$ et $i \in I$.
- $\mathbf{i} \in \mathcal{X} \rightsquigarrow$ chemin de $\mu_1(b)$ à $\mu_{w_0}(b)$; les arêtes sont $n_1\beta_1, n_2\beta_2, \dots, n_L\beta_L$, où $(n_1, n_2, \dots, n_L) = \mathbf{n}(\mathbf{i}, b)$.

Polytope MV

- $\mathbf{i} \in \mathcal{X} \rightsquigarrow$ bijection $\mathbf{n} \mapsto b(\mathbf{i}, \mathbf{n})$ de \mathbb{N}^L sur \mathbf{B} .
- Par inversion, bijection $b \mapsto \mathbf{n}(\mathbf{i}, b)$ de $B(-\infty)$ sur \mathbb{N}^L .

Manière géométrique d'assembler ces données numériques :

$$b \in B(-\infty) \mapsto \text{Pol}(b) \subseteq \mathfrak{h}^*, \quad \text{le polytope MV de } b.$$

- Points extrémaux $\mu_w(b)$ indexés par $w \in W$.
- $\mu_1(b) = 0$, $\mu_{w_0}(b) =$ poids de b .
- Arête entre $\mu_w(b)$ et $\mu_{ws_i}(b)$, pour $w \in W$ et $i \in I$.
- $\mathbf{i} \in \mathcal{X} \rightsquigarrow$ chemin de $\mu_1(b)$ à $\mu_{w_0}(b)$; les arêtes sont $n_1\beta_1, n_2\beta_2, \dots, n_L\beta_L$, où $(n_1, n_2, \dots, n_L) = \mathbf{n}(\mathbf{i}, b)$.

Polytope MV

- $\mathbf{i} \in \mathcal{X} \rightsquigarrow$ bijection $\mathbf{n} \mapsto b(\mathbf{i}, \mathbf{n})$ de \mathbb{N}^L sur \mathbf{B} .
- Par inversion, bijection $b \mapsto \mathbf{n}(\mathbf{i}, b)$ de $B(-\infty)$ sur \mathbb{N}^L .

Manière géométrique d'assembler ces données numériques :

$$b \in B(-\infty) \mapsto \text{Pol}(b) \subseteq \mathfrak{h}^*, \quad \text{le polytope MV de } b.$$

- Points extrémaux $\mu_w(b)$ indexés par $w \in W$.
- $\mu_1(b) = 0$, $\mu_{w_0}(b) =$ poids de b .
- Arête entre $\mu_w(b)$ et $\mu_{ws_i}(b)$, pour $w \in W$ et $i \in I$.
- $\mathbf{i} \in \mathcal{X} \rightsquigarrow$ chemin de $\mu_1(b)$ à $\mu_{w_0}(b)$; les arêtes sont $n_1\beta_1, n_2\beta_2, \dots, n_L\beta_L$, où $(n_1, n_2, \dots, n_L) = \mathbf{n}(\mathbf{i}, b)$.

Propriétés de la base semi-canonique

- Construite par Lusztig en 1992 (preuve que cette base est de type canonique en 2000).
- **Seulement pour les types simplement lacés.**
- S'étend au cas \mathfrak{g} algèbre de Kac-Moody symétrique.
- Difficile à calculer.
- **La base duale** (dans l'algèbre des fonctions régulières sur le groupe unipotent maximal) **a un comportement multiplicatif agréable** (Geiß-Leclerc-Schröer).

Carquois double

Ici \mathfrak{g} supposée simplement lacée.

- Diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g} \rightsquigarrow$ graphe orienté :
remplacer chaque arête par une **paire de flèches tête-bêche**.

Exemple en type A_3 :

$$1 \begin{array}{c} \xleftarrow{a} \\ \xrightarrow{\bar{a}} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xleftarrow{b} \\ \xrightarrow{\bar{b}} \end{array} 3$$

- $I = \{\text{sommets}\}$, $H = \{\text{flèches}\}$, $h \mapsto \bar{h}$ involution échangeant les deux éléments de chaque paire.
- $s, t : H \rightarrow I$ applications source et terminus.
- $\Omega \subseteq H$ tel que $H = \Omega \sqcup \bar{\Omega}$.

Carquois double

Ici \mathfrak{g} supposée simplement lacée.

- Diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g} \rightsquigarrow$ graphe orienté :
remplacer chaque arête par une **paire de flèches tête-bêche**.

Exemple en type A_3 :

$$1 \begin{array}{c} \xleftarrow{a} \\ \xrightarrow{\bar{a}} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xleftarrow{b} \\ \xrightarrow{\bar{b}} \end{array} 3$$

- $I = \{\text{sommets}\}$, $H = \{\text{flèches}\}$, $h \mapsto \bar{h}$ involution échangeant les deux éléments de chaque paire.
- $s, t : H \rightarrow I$ applications source et terminus.
- $\Omega \subseteq H$ tel que $H = \Omega \sqcup \bar{\Omega}$.

Carquois double

Ici \mathfrak{g} supposée simplement lacée.

- Diagramme de Dynkin de $\mathfrak{g} \rightsquigarrow$ graphe orienté :
remplacer chaque arête par une **paire de flèches tête-bêche**.

Exemple en type A_3 :

$$1 \begin{array}{c} \xleftarrow{a} \\ \xrightarrow{\bar{a}} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xleftarrow{b} \\ \xrightarrow{\bar{b}} \end{array} 3$$

- $I = \{\text{sommets}\}$, $H = \{\text{flèches}\}$, $h \mapsto \bar{h}$ involution échangeant les deux éléments de chaque paire.
- $s, t : H \rightarrow I$ applications source et terminus.
- $\Omega \subseteq H$ tel que $H = \Omega \sqcup \bar{\Omega}$.

Représentation de l'algèbre préprojective

C'est la donnée de :

- un \mathbb{C} -espace vectoriel gradué $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$,
- d'applications linéaires $x_h : V_{s(h)} \rightarrow V_{t(h)}$ pour $h \in H$,
- de sorte que pour chaque $i \in I$,

$$\sum_{\substack{h \in \Omega \\ s(h)=i}} x_{\bar{h}} x_h = \sum_{\substack{h \in \bar{\Omega} \\ s(h)=i}} x_{\bar{h}} x_h.$$

\rightsquigarrow catégorie abélienne

- vecteur-dimension de la représentation : $\sum_{i \in I} (\dim V_i) \alpha_i \in Q_+$.
- $i \in I \rightsquigarrow S_i$ représentation de dimension 1 supportée en i .

Représentation de l'algèbre préprojective

C'est la donnée de :

- un \mathbb{C} -espace vectoriel gradué $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$,
- d'applications linéaires $x_h : V_{s(h)} \rightarrow V_{t(h)}$ pour $h \in H$,
- de sorte que pour chaque $i \in I$,

$$\sum_{\substack{h \in \Omega \\ s(h)=i}} x_{\bar{h}} x_h = \sum_{\substack{h \in \bar{\Omega} \\ s(h)=i}} x_{\bar{h}} x_h.$$

\rightsquigarrow catégorie abélienne

- vecteur-dimension de la représentation : $\sum_{i \in I} (\dim V_i) \alpha_i \in \mathbb{Q}_+$.
- $i \in I \rightsquigarrow S_i$ représentation de dimension 1 supportée en i .

Modèle préprojectif de $U(\mathfrak{n}^+)$

- $\nu \in Q_+ \rightsquigarrow \text{Iso}_\nu$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations de vecteur-dimension ν .
 $\rightsquigarrow \mathcal{M}_\nu$ l'espace vectoriel de base Iso_ν .
- Structure d'algèbre graduée sur $\mathcal{M} = \bigoplus_{\nu \in Q_+} \mathcal{M}_\nu$:

$$[M'] * [M''] = \sum_M g_{M', M''}^M [M],$$

où $g_{M', M''}^M$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré à support compact de la partie constructible

$$\{ N \text{ sous-représentation de } M \mid M/N \cong M' \text{ et } N \cong M'' \}.$$

Modèle préprojectif de $U(\mathfrak{n}^+)$

- L'ensemble \mathcal{M}_ν des fonctions $\text{Iso}_\nu \rightarrow \mathbb{C}$ à support fini n'est pas stable par le produit de convolution $*$.
- On complète en définissant \mathcal{M}_ν comme un ensemble de fonctions sur Iso_ν sans cette condition de support.
- Il faut pouvoir prolonger le produit $*$ à la complétion : on prend

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\nu &= \{\text{fonctions constructibles } \text{Iso}_\nu \rightarrow \mathbb{C}\} \\ &= \{\text{combinaisons linéaires des fonctions indicatrices} \\ &\quad \text{de parties localement fermées de } \text{Iso}_\nu\}.\end{aligned}$$

- Il faut donc munir Iso_ν d'une topologie.

Modèle préprojectif de $U(\mathfrak{n}^+)$

- L'ensemble \mathcal{M}_ν des fonctions $\text{Iso}_\nu \rightarrow \mathbb{C}$ à support fini n'est pas stable par le produit de convolution $*$.
- On complète en définissant \mathcal{M}_ν comme un ensemble de fonctions sur Iso_ν sans cette condition de support.
- Il faut pouvoir prolonger le produit $*$ à la complétion : on prend

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\nu &= \{\text{fonctions constructibles } \text{Iso}_\nu \rightarrow \mathbb{C}\} \\ &= \{\text{combinaisons linéaires des fonctions indicatrices} \\ &\quad \text{de parties localement fermées de } \text{Iso}_\nu\}.\end{aligned}$$

- Il faut donc munir Iso_ν d'une topologie.

Modèle préprojectif de $U(\mathfrak{n}^+)$

- À $\nu \in Q_+$ donné, on peut fixer $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ et définir

$$E_\nu \times E_\nu^* = \prod_{h \in \Omega} \text{Hom}(V_{s(h)}, V_{t(h)}) \times \prod_{h \in \bar{\Omega}} \text{Hom}(V_{s(h)}, V_{t(h)}),$$

$$\Lambda_\nu = \left\{ (x_h) \in E_\nu \times E_\nu^* \mid \forall i \in I, \sum_{\substack{h \in \Omega \\ s(h)=i}} x_{\bar{h}} x_h = \sum_{\substack{h \in \bar{\Omega} \\ s(h)=i}} x_{\bar{h}} x_h \right\}.$$

- Iso_ν est l'ensemble des orbites de $G_\nu = \prod_{i \in I} \text{GL}(V_i)$ dans Λ_ν .
- $\mathcal{M}_\nu = \{\text{fonctions constructibles } G_\nu\text{-invariantes } \Lambda_\nu \rightarrow \mathbb{C}\}$.
- $\mathcal{M} = \bigoplus_{\nu \in Q_+} \mathcal{M}_\nu$ est une algèbre graduée.

Modèle préprojectif de $U(\mathfrak{n}^+)$

- À $\nu \in Q_+$ donné, on peut fixer $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ et définir

$$E_\nu \times E_\nu^* = \prod_{h \in \Omega} \text{Hom}(V_{s(h)}, V_{t(h)}) \times \prod_{h \in \bar{\Omega}} \text{Hom}(V_{s(h)}, V_{t(h)}),$$

$$\Lambda_\nu = \left\{ (x_h) \in E_\nu \times E_\nu^* \mid \forall i \in I, \sum_{\substack{h \in \Omega \\ s(h)=i}} x_{\bar{h}} x_h = \sum_{\substack{h \in \bar{\Omega} \\ s(h)=i}} x_{\bar{h}} x_h \right\}.$$

- Iso_ν est l'ensemble des orbites de $G_\nu = \prod_{i \in I} \text{GL}(V_i)$ dans Λ_ν .
- $\mathcal{M}_\nu = \{\text{fonctions constructibles } G_\nu\text{-invariantes } \Lambda_\nu \rightarrow \mathbb{C}\}$.
- $\mathcal{M} = \bigoplus_{\nu \in Q_+} \mathcal{M}_\nu$ est une algèbre graduée.

Modèle préprojectif de $U(\mathfrak{n}^+)$

Théorème (Lusztig, 1991)

1. Il existe un morphisme injectif d'algèbres

$$\kappa : U(\mathfrak{n}^+) \rightarrow \mathcal{M}, \quad e_i \mapsto [S_i].$$

2. Λ_ν est une sous-variété lagrangienne de $E_\nu \times E_\nu^*$.

Définition de la base semi-canonique

$Z \subseteq \Lambda_\nu$ composante irréductible \rightsquigarrow chaque $f : \Lambda_\nu \rightarrow \mathbb{C}$ constructible admet une valeur générique sur Z , disons $\rho_Z(f)$.

Théorème (Lusztig)

1. Il existe des fonctions $f_Z \in \text{im } \kappa \cap \mathcal{M}_\nu$ telles que

$$\forall Z, Z' \in \text{Irr}(\Lambda_\nu), \quad \rho_{Z'}(f_Z) = \delta_{Z, Z'}.$$

2. Les $\kappa^{-1}(f_Z)$ forment une base de type canonique de $U(\mathfrak{n}^+)$: **base semi-canonique**.

Fait utilisé dans la preuve (dû à Kashiwara-Saito, 1997)

Il y a une bijection $B(-\infty) \rightarrow \bigsqcup_{\nu \in Q_+} \text{Irr}(\Lambda_\nu)$, $b \mapsto \Lambda_b$

telle que $\varphi_i(b)$ soit la valeur générique de la fonction $M \mapsto \dim \text{Hom}(M, S_i)$ sur Λ_b .

Définition de la base semi-canonique

$Z \subseteq \Lambda_\nu$ composante irréductible \rightsquigarrow chaque $f : \Lambda_\nu \rightarrow \mathbb{C}$ constructible admet une valeur générique sur Z , disons $\rho_Z(f)$.

Théorème (Lusztig)

1. Il existe des fonctions $f_Z \in \text{im } \kappa \cap \mathcal{M}_\nu$ telles que

$$\forall Z, Z' \in \text{Irr}(\Lambda_\nu), \quad \rho_{Z'}(f_Z) = \delta_{Z, Z'}.$$

2. Les $\kappa^{-1}(f_Z)$ forment une base de type canonique de $U(\mathfrak{n}^+)$: **base semi-canonique**.

Fait utilisé dans la preuve (dû à Kashiwara-Saito, 1997)

Il y a une bijection $B(-\infty) \rightarrow \bigsqcup_{\nu \in Q_+} \text{Irr}(\Lambda_\nu)$, $b \mapsto \Lambda_b$

telle que $\varphi_i(b)$ soit la valeur générique de la fonction $M \mapsto \dim \text{Hom}(M, S_i)$ sur Λ_b .

Définition de la base semi-canonique

$Z \subseteq \Lambda_\nu$ composante irréductible \rightsquigarrow chaque $f : \Lambda_\nu \rightarrow \mathbb{C}$ constructible admet une valeur générique sur Z , disons $\rho_Z(f)$.

Théorème (Lusztig)

1. Il existe des fonctions $f_Z \in \text{im } \kappa \cap \mathcal{M}_\nu$ telles que

$$\forall Z, Z' \in \text{Irr}(\Lambda_\nu), \quad \rho_{Z'}(f_Z) = \delta_{Z, Z'}.$$

2. Les $\kappa^{-1}(f_Z)$ forment une base de type canonique de $U(\mathfrak{n}^+)$: **base semi-canonique**.

Fait utilisé dans la preuve (dû à Kashiwara-Saito, 1997)

Il y a une bijection $B(-\infty) \rightarrow \bigsqcup_{\nu \in Q_+} \text{Irr}(\Lambda_\nu)$, $b \mapsto \Lambda_b$

telle que $\varphi_i(b)$ soit la valeur générique de la fonction $M \mapsto \dim \text{Hom}(M, S_i)$ sur Λ_b .

Polytopes MV et base semi-canonique

- $\{\varpi_i \mid i \in I\}$ les poids fondamentaux,
- $(,)$ le produit scalaire W -invariant sur \mathfrak{h}^* tel que $\|\alpha_i\|^2 = 2$.

Fait (Nakajima, Lusztig, ...)

Pour $w \in W$ et $i \in I$, l'algèbre préprojective a une seule représentation $N(-w\varpi_i)$ de vecteur-dimension $\varpi_i - w\varpi_i$ et de socle S_j .

Théorème (avec Kamnitzer)

Soit $b \in B(-\infty)$. Pour M générique dans Λ_b ,

$$\text{Pol}(b) = \bigcap_{\substack{w \in W \\ i \in I}} \{x \in \mathfrak{h}^* \mid (-w\varpi_i, x) \leq \dim \text{Hom}(N(-w\varpi_i), M)\}.$$

Polytopes MV et base semi-canonique

- $\{\varpi_i \mid i \in I\}$ les poids fondamentaux,
- $(,)$ le produit scalaire W -invariant sur \mathfrak{h}^* tel que $\|\alpha_i\|^2 = 2$.

Fait (Nakajima, Lusztig, ...)

Pour $w \in W$ et $i \in I$, l'algèbre préprojective a une seule représentation $N(-w\varpi_i)$ de vecteur-dimension $\varpi_i - w\varpi_i$ et de socle S_i .

Théorème (avec Kamnitzer)

Soit $b \in B(-\infty)$. Pour M générique dans Λ_b ,

$$\text{Pol}(b) = \bigcap_{\substack{w \in W \\ i \in I}} \{x \in \mathfrak{h}^* \mid (-w\varpi_i, x) \leq \dim \text{Hom}(N(-w\varpi_i), M)\}.$$

Polytopes MV et base semi-canonique

- $\{\varpi_i \mid i \in I\}$ les poids fondamentaux,
- $(,)$ le produit scalaire W -invariant sur \mathfrak{h}^* tel que $\|\alpha_i\|^2 = 2$.

Fait (Nakajima, Lusztig, ...)

Pour $w \in W$ et $i \in I$, l'algèbre préprojective a une seule représentation $N(-w\varpi_i)$ de vecteur-dimension $\varpi_i - w\varpi_i$ et de socle S_i .

Théorème (avec Kamnitzer)

Soit $b \in B(-\infty)$. Pour M générique dans Λ_b ,

$$\text{Pol}(b) = \bigcap_{\substack{w \in W \\ i \in I}} \{x \in \mathfrak{h}^* \mid (-w\varpi_i, x) \leq \dim \text{Hom}(N(-w\varpi_i), M)\}.$$

Comparaison des bases

Théorème

On indexe les bases canonique et semi-canonique par $B(-\infty)$. La matrice de passage entre les deux bases est unitriangulaire inférieure pour l'ordre suivant sur $B(-\infty)$:

$$b \leq b' \iff b \text{ et } b' \text{ ont même poids et } \text{Pol}(b) \subseteq \text{Pol}(b').$$

► Complément

Propriétés de la base de Mirković-Vilonen

- Construite par Mirković et Vilonen en 1999–2004.
- Ne s'étend pas facilement au cas \mathfrak{g} algèbre de Kac-Moody.
- Difficile à calculer.
- **Cadre naturel pour les q -multiplicités de Lusztig** (polynômes de Kostka-Foulkes).

► Complément

La grassmannienne affine

- G^\vee le groupe algébrique **dual de Langlands** du groupe simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} .
- $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[t]]$, $\mathcal{K} = \mathbb{C}((t))$
 $\rightsquigarrow G^\vee(\mathcal{K})$ (presque) un groupe de Kac-Moody affine
 et $G^\vee(\mathcal{O}) \approx$ sous-groupe parabolique maximal.
- $\mathcal{G} = G^\vee(\mathcal{K})/G^\vee(\mathcal{O})$, la **grassmannienne affine**.
- Plongement $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$, où V représentation de $\widehat{G^\vee(\mathcal{K})}$
 \Rightarrow topologie sur \mathcal{G} + fibré en droites très ample \mathcal{L} sur \mathcal{G} .

La grassmannienne affine

- G^\vee le groupe algébrique **dual de Langlands** du groupe simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} .
- $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[t]]$, $\mathcal{K} = \mathbb{C}((t))$
 $\rightsquigarrow G^\vee(\mathcal{K})$ (presque) un groupe de Kac-Moody affine
et $G^\vee(\mathcal{O}) \approx$ sous-groupe parabolique maximal.
- $\mathcal{G} = G^\vee(\mathcal{K})/G^\vee(\mathcal{O})$, la **grassmannienne affine**.
- Plongement $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$, où V représentation de $\widehat{G^\vee(\mathcal{K})}$
 \Rightarrow topologie sur \mathcal{G} + fibré en droites très ample \mathcal{L} sur \mathcal{G} .

La grassmannienne affine

- G^\vee le groupe algébrique **dual de Langlands** du groupe simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} .
- $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[t]]$, $\mathcal{K} = \mathbb{C}((t))$
 $\rightsquigarrow G^\vee(\mathcal{K})$ (presque) un groupe de Kac-Moody affine
 et $G^\vee(\mathcal{O}) \approx$ sous-groupe parabolique maximal.
- $\mathcal{G} = G^\vee(\mathcal{K})/G^\vee(\mathcal{O})$, la **grassmannienne affine**.
- Plongement $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$, où V représentation de $\widehat{G^\vee(\mathcal{K})}$
 \Rightarrow topologie sur \mathcal{G} + fibré en droites très ample \mathcal{L} sur \mathcal{G} .

La grassmannienne affine

- G^\vee le groupe algébrique **dual de Langlands** du groupe simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} .
- $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[t]]$, $\mathcal{K} = \mathbb{C}((t))$
 $\rightsquigarrow G^\vee(\mathcal{K})$ (presque) un groupe de Kac-Moody affine
et $G^\vee(\mathcal{O}) \approx$ sous-groupe parabolique maximal.
- $\mathcal{G} = G^\vee(\mathcal{K})/G^\vee(\mathcal{O})$, la **grassmannienne affine**.
- Plongement $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$, où V représentation de $\widehat{G^\vee(\mathcal{K})}$
 \Rightarrow topologie sur \mathcal{G} + fibré en droites très ample \mathcal{L} sur \mathcal{G} .

Orbites dans la grassmannienne affine

- N^+ le sous-groupe unipotent maximal positif de G^\vee .
- $P \subseteq \mathfrak{h}^*$ le réseau des poids, $P_- \subseteq P$ le cône antidominant.
- Chaque $\lambda \in P$ est un cocaractère du tore de G^\vee
 $\rightsquigarrow t^\lambda \in G^\vee(\mathcal{K}), [t^\lambda] \in \mathcal{G}$.
- Décompositions en orbites (Cartan, Iwasawa) :

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{\lambda \in P_-} \underbrace{G^\vee(\mathcal{O})[t^\lambda]}_{\mathcal{G}_\lambda} = \bigoplus_{\mu \in P} \underbrace{N^+(\mathcal{K})[t^\mu]}_{S_\mu}.$$

- $\overline{\mathcal{G}_\lambda} = \bigsqcup_{\zeta \in P_- \cap (\lambda + Q_+)} \mathcal{G}_\zeta$.
- $\overline{\mathcal{G}_\lambda}$ variété algébrique singulière, \mathcal{G}_λ simplement connexe.

Orbites dans la grassmannienne affine

- N^+ le sous-groupe unipotent maximal positif de G^\vee .
- $P \subseteq \mathfrak{h}^*$ le réseau des poids, $P_- \subseteq P$ le cône antidominant.
- Chaque $\lambda \in P$ est un cocaractère du tore de G^\vee
 $\rightsquigarrow t^\lambda \in G^\vee(\mathcal{K}), [t^\lambda] \in \mathcal{G}$.
- Décompositions en orbites (Cartan, Iwasawa) :

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{\lambda \in P_-} \underbrace{G^\vee(\mathcal{O})[t^\lambda]}_{\mathcal{G}_\lambda} = \bigoplus_{\mu \in P} \underbrace{N^+(\mathcal{K})[t^\mu]}_{S_\mu}.$$

- $\overline{\mathcal{G}_\lambda} = \bigsqcup_{\zeta \in P_- \cap (\lambda + Q_+)} \mathcal{G}_\zeta$.
- $\overline{\mathcal{G}_\lambda}$ variété algébrique singulière, \mathcal{G}_λ simplement connexe.

Orbites dans la grassmannienne affine

- N^+ le sous-groupe unipotent maximal positif de G^\vee .
- $P \subseteq \mathfrak{h}^*$ le réseau des poids, $P_- \subseteq P$ le cône antidominant.
- Chaque $\lambda \in P$ est un cocaractère du tore de G^\vee
 $\rightsquigarrow t^\lambda \in G^\vee(\mathcal{K}), [t^\lambda] \in \mathcal{G}$.
- Décompositions en orbites (Cartan, Iwasawa) :

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{\lambda \in P_-} \underbrace{G^\vee(\mathcal{O})[t^\lambda]}_{\mathcal{G}_\lambda} = \bigoplus_{\mu \in P} \underbrace{N^+(\mathcal{K})[t^\mu]}_{S_\mu}.$$

- $\overline{\mathcal{G}_\lambda} = \bigsqcup_{\zeta \in P_- \cap (\lambda + Q_+)} \mathcal{G}_\zeta$.
- $\overline{\mathcal{G}_\lambda}$ variété algébrique singulière, \mathcal{G}_λ simplement connexe.

Orbites dans la grassmannienne affine

- N^+ le sous-groupe unipotent maximal positif de G^\vee .
- $P \subseteq \mathfrak{h}^*$ le réseau des poids, $P_- \subseteq P$ le cône antidominant.
- Chaque $\lambda \in P$ est un cocaractère du tore de G^\vee
 $\rightsquigarrow t^\lambda \in G^\vee(\mathcal{K}), [t^\lambda] \in \mathcal{G}$.
- Décompositions en orbites (Cartan, Iwasawa) :

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{\lambda \in P_-} \underbrace{G^\vee(\mathcal{O})[t^\lambda]}_{\mathcal{G}_\lambda} = \bigoplus_{\mu \in P} \underbrace{N^+(\mathcal{K})[t^\mu]}_{S_\mu}.$$

- $\overline{\mathcal{G}_\lambda} = \bigsqcup_{\zeta \in P_- \cap (\lambda + Q_+)} \mathcal{G}_\zeta$.
- $\overline{\mathcal{G}_\lambda}$ variété algébrique singulière, \mathcal{G}_λ simplement connexe.

Orbites dans la grassmannienne affine

- N^+ le sous-groupe unipotent maximal positif de G^\vee .
- $P \subseteq \mathfrak{h}^*$ le réseau des poids, $P_- \subseteq P$ le cône antidominant.
- Chaque $\lambda \in P$ est un cocaractère du tore de G^\vee
 $\rightsquigarrow t^\lambda \in G^\vee(\mathcal{K}), [t^\lambda] \in \mathcal{G}$.
- Décompositions en orbites (Cartan, Iwasawa) :

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{\lambda \in P_-} \underbrace{G^\vee(\mathcal{O})[t^\lambda]}_{\mathcal{G}_\lambda} = \bigoplus_{\mu \in P} \underbrace{N^+(\mathcal{K})[t^\mu]}_{S_\mu}.$$

- $\overline{\mathcal{G}_\lambda} = \bigsqcup_{\zeta \in P_- \cap (\lambda + Q_+)} \mathcal{G}_\zeta$.
- $\overline{\mathcal{G}_\lambda}$ variété algébrique singulière, \mathcal{G}_λ simplement connexe.

Action de \mathfrak{g} sur $\mathrm{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$

- Lusztig, 1981 : $\mathrm{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$ a même dimension que la représentation simple de \mathfrak{g} de plus bas poids λ .
- $(,)$ le produit scalaire W -invariant sur \mathfrak{h}^* ,
- $\rho \in \mathfrak{h}^*$ tel que $(\rho, \alpha_i) = 1$ pour tout $i \in I$.

Proposition (Mirković-Vilonen)

Soient $\lambda \in P_-$ et $k \in \mathbb{Z}$. Alors la restriction

$$\mathrm{IH}^k(\overline{\mathcal{G}}_\lambda) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\mu \in P \\ k=2(\rho, \mu - \lambda)}} \mathbb{H}^k(\overline{\mathcal{S}}_\mu, \mathcal{IC}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda))$$

est un isomorphisme.

Ingrédient principal de la preuve

$\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \mathcal{G}_\lambda$ est de dimension pure $(\rho, \mu - \lambda)$.

Action de \mathfrak{g} sur $\mathrm{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$

- Lusztig, 1981 : $\mathrm{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$ a même dimension que la représentation simple de \mathfrak{g} de plus bas poids λ .
- $(,)$ le produit scalaire W -invariant sur \mathfrak{h}^* ,
- $\rho \in \mathfrak{h}^*$ tel que $(\rho, \alpha_i) = 1$ pour tout $i \in I$.

Proposition (Mirković-Vilonen)

Soient $\lambda \in P_-$ et $k \in \mathbb{Z}$. Alors la restriction

$$\mathrm{IH}^k(\overline{\mathcal{G}}_\lambda) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\mu \in P \\ k=2(\rho, \mu - \lambda)}} \mathbb{H}^k(\overline{\mathcal{S}}_\mu, \mathcal{IC}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda))$$

est un isomorphisme.

Ingrédient principal de la preuve

$\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \mathcal{G}_\lambda$ est de dimension pure $(\rho, \mu - \lambda)$.

Action de \mathfrak{g} sur $\mathrm{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$

- Lusztig, 1981 : $\mathrm{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$ a même dimension que la représentation simple de \mathfrak{g} de plus bas poids λ .
- $(,)$ le produit scalaire W -invariant sur \mathfrak{h}^* ,
- $\rho \in \mathfrak{h}^*$ tel que $(\rho, \alpha_i) = 1$ pour tout $i \in I$.

Proposition (Mirković-Vilonen)

Soient $\lambda \in P_-$ et $k \in \mathbb{Z}$. Alors la restriction

$$\mathrm{IH}^k(\overline{\mathcal{G}}_\lambda) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\mu \in P \\ k=2(\rho, \mu - \lambda)}} \mathbb{H}^k(\overline{\mathcal{S}}_\mu, \mathcal{IC}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda))$$

est un isomorphisme.

Ingrédient principal de la preuve

$\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \mathcal{G}_\lambda$ est de dimension pure $(\rho, \mu - \lambda)$.

Action de \mathfrak{g} sur $\mathrm{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$

- Lusztig, 1981 : $\mathrm{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$ a même dimension que la représentation simple de \mathfrak{g} de plus bas poids λ .
- $(,)$ le produit scalaire W -invariant sur \mathfrak{h}^* ,
- $\rho \in \mathfrak{h}^*$ tel que $(\rho, \alpha_i) = 1$ pour tout $i \in I$.

Proposition (Mirković-Vilonen)

Soient $\lambda \in P_-$ et $k \in \mathbb{Z}$. Alors la restriction

$$\mathrm{IH}^k(\overline{\mathcal{G}}_\lambda) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\mu \in P \\ k=2(\rho, \mu - \lambda)}} \mathrm{IH}^k(\overline{\mathcal{S}}_\mu, \mathcal{IC}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda))$$

est un isomorphisme.

Ingrédient principal de la preuve

$\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \mathcal{G}_\lambda$ est de dimension pure $(\rho, \mu - \lambda)$.

Action de \mathfrak{g} sur $\mathrm{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$

Théorème (Ginzburg, Vasserot)

$\mathrm{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$ peut être muni d'une action de \mathfrak{g} telle que :

- \mathfrak{h} agit selon $\mathrm{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda) \cong \bigoplus_{\mu \in P} \mathbb{H}^k(\overline{\mathcal{S}}_\mu, \mathcal{IC}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda))$.
- le nilpotent principal $e = \sum_{i \in I} \|\alpha_i\|^2 e_i$ agit par le cup-produit par $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(\mathcal{G})$.

On obtient ainsi la représentation simple de plus bas poids λ .

Action de \mathfrak{g} sur $\mathrm{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$

Théorème (Ginzburg, Vasserot)

$\mathrm{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$ peut être muni d'une action de \mathfrak{g} telle que :

- \mathfrak{h} agit selon $\mathrm{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda) \cong \bigoplus_{\mu \in P} \mathbb{H}^k(\overline{\mathcal{S}}_\mu, \mathcal{IC}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda))$.
- le nilpotent principal $e = \sum_{i \in I} \|\alpha_i\|^2 e_i$ agit par le cup-produit par $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(\mathcal{G})$.

On obtient ainsi la représentation simple de plus bas poids λ .

Action de \mathfrak{g} sur $\mathrm{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$

Théorème (Ginzburg, Vasserot)

$\mathrm{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$ peut être muni d'une action de \mathfrak{g} telle que :

- \mathfrak{h} agit selon $\mathrm{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda) \cong \bigoplus_{\mu \in P} \mathbb{H}^k(\overline{\mathcal{S}}_\mu, \mathcal{IC}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda))$.
- le nilpotent principal $e = \sum_{i \in I} \|\alpha_i\|^2 e_i$ agit par le cup-produit par $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(\mathcal{G})$.

On obtient ainsi la représentation simple de plus bas poids λ .

Base des cycles de Mirković-Vilonen

Mirković-Vilonen : pour $\mu \in P$ et $k = 2(\rho, \mu - \lambda)$,

$$\mathbb{H}^k(\overline{\mathcal{S}}_\mu, \mathcal{IC}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)) \cong \mathbb{H}_c^k(\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \mathcal{G}_\lambda, \mathbb{C}) \cong (H_{\text{top}}^{\text{BM}}(\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \mathcal{G}_\lambda, \mathbb{C}))^*.$$

Les éléments de $\text{Irr}(\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \mathcal{G}_\lambda)$, appelés **cycles MV**, indexent donc une base du sous-espace de poids μ de $\text{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$.

Soit ξ l'élément de plus bas poids de cette base.

Théorème (avec Kamnitzer)

Cette base est l'image d'une base de type canonique de $U(\mathfrak{n}^+)$ par l'application $X \mapsto X \cdot \xi$.

Raison pour laquelle les bases des $\text{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$ se « recollent » en une base de $U(\mathfrak{n}^+)$: si $\zeta \in P_-$, alors $\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \overline{\mathcal{G}}_\lambda$ se plonge dans $\overline{\mathcal{S}}_{\mu+\zeta} \cap \overline{\mathcal{G}}_{\lambda+\zeta}$.

Base des cycles de Mirković-Vilonen

Mirković-Vilonen : pour $\mu \in P$ et $k = 2(\rho, \mu - \lambda)$,

$$\mathbb{H}^k(\overline{\mathcal{S}}_\mu, \mathcal{IC}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)) \cong \mathbb{H}_c^k(\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \mathcal{G}_\lambda, \mathbb{C}) \cong (H_{\text{top}}^{\text{BM}}(\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \mathcal{G}_\lambda, \mathbb{C}))^*.$$

Les éléments de $\text{Irr}(\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \mathcal{G}_\lambda)$, appelés **cycles MV**, indexent donc une base du sous-espace de poids μ de $\text{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$.

Soit ξ l'élément de plus bas poids de cette base.

Théorème (avec Kamnitzer)

Cette base est l'image d'une base de type canonique de $U(\mathfrak{n}^+)$ par l'application $X \mapsto X \cdot \xi$.

Raison pour laquelle les bases des $\text{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$ se « recollent » en une base de $U(\mathfrak{n}^+)$: si $\zeta \in P_-$, alors $\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \overline{\mathcal{G}}_\lambda$ se plonge dans $\overline{\mathcal{S}}_{\mu+\zeta} \cap \overline{\mathcal{G}}_{\lambda+\zeta}$.

Base des cycles de Mirković-Vilonen

Mirković-Vilonen : pour $\mu \in P$ et $k = 2(\rho, \mu - \lambda)$,

$$\mathbb{H}^k(\overline{\mathcal{S}}_\mu, \mathcal{IC}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)) \cong \mathbb{H}_c^k(\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \mathcal{G}_\lambda, \mathbb{C}) \cong (H_{\text{top}}^{\text{BM}}(\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \mathcal{G}_\lambda, \mathbb{C}))^*.$$

Les éléments de $\text{Irr}(\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \mathcal{G}_\lambda)$, appelés **cycles MV**, indexent donc une base du sous-espace de poids μ de $\text{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$.

Soit ξ l'élément de plus bas poids de cette base.

Théorème (avec Kamnitzer)

Cette base est l'image d'une base de type canonique de $U(\mathfrak{n}^+)$ par l'application $X \mapsto X \cdot \xi$.

Raison pour laquelle les bases des $\text{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$ se « recollent » en une base de $U(\mathfrak{n}^+)$: si $\zeta \in P_-$, alors $\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \overline{\mathcal{G}}_\lambda$ se plonge dans $\overline{\mathcal{S}}_{\mu+\zeta} \cap \overline{\mathcal{G}}_{\lambda+\zeta}$.

Base des cycles de Mirković-Vilonen

Mirković-Vilonen : pour $\mu \in P$ et $k = 2(\rho, \mu - \lambda)$,

$$\mathbb{H}^k(\overline{\mathcal{S}}_\mu, \mathcal{IC}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)) \cong \mathbb{H}_c^k(\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \mathcal{G}_\lambda, \mathbb{C}) \cong (H_{\text{top}}^{\text{BM}}(\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \mathcal{G}_\lambda, \mathbb{C}))^*.$$

Les éléments de $\text{Irr}(\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \mathcal{G}_\lambda)$, appelés **cycles MV**, indexent donc une base du sous-espace de poids μ de $\text{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$.

Soit ξ l'élément de plus bas poids de cette base.

Théorème (avec Kamnitzer)

Cette base est l'image d'une base de type canonique de $U(\mathfrak{n}^+)$ par l'application $X \mapsto X \cdot \xi$.

Raison pour laquelle les bases des $\text{IH}(\overline{\mathcal{G}}_\lambda)$ se « recollent » en une base de $U(\mathfrak{n}^+)$: si $\zeta \in P_-$, alors $\overline{\mathcal{S}}_\mu \cap \overline{\mathcal{G}}_\lambda$ se plonge dans $\overline{\mathcal{S}}_{\mu+\zeta} \cap \overline{\mathcal{G}}_{\lambda+\zeta}$.

Cycles MV et polytopes MV

- $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$, donc \mathcal{G} kählérienne, donc \mathcal{G} symplectique.
- L'action du tore compact de G^\vee est hamiltonienne
 \rightsquigarrow application moment $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{h}$.
- Via le produit scalaire W -invariant, μ est à valeurs dans \mathfrak{h}^* .

Théorème (Kamnitzer, 2005)

Soit $b \in B(-\infty)$ de poids disons ν . Soit $\lambda \in P_-$ assez antidominant.

Alors b correspond à un cycle MV, disons $Z_b \in \text{Irr}(\overline{S_{\lambda+\nu}} \cap \mathcal{G}_\lambda)$,
 et

$$\mu(\overline{Z_b}) = \text{Pol}(b) + \lambda.$$

Cycles MV et polytopes MV

- $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$, donc \mathcal{G} kählérienne, donc \mathcal{G} **symplectique**.
- L'action du tore compact de G^V est hamiltonienne
 \rightsquigarrow **application moment** $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{h}$.
- Via le produit scalaire W -invariant, μ est à valeurs dans \mathfrak{h}^* .

Théorème (Kamnitzer, 2005)

Soit $b \in B(-\infty)$ de poids disons ν . Soit $\lambda \in P_-$ assez antidominant.

Alors b correspond à un cycle MV , disons $Z_b \in \text{Irr}(\overline{S_{\lambda+\nu}} \cap \mathcal{G}_\lambda)$,
 et

$$\mu(\overline{Z_b}) = \text{Pol}(b) + \lambda.$$

Cycles MV et polytopes MV

- $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$, donc \mathcal{G} kählérienne, donc \mathcal{G} **symplectique**.
- L'action du tore compact de G^\vee est hamiltonienne
 \rightsquigarrow **application moment** $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{h}$.
- Via le produit scalaire W -invariant, μ est à valeurs dans \mathfrak{h}^* .

Théorème (Kamnitzer, 2005)

Soit $b \in B(-\infty)$ de poids disons ν . Soit $\lambda \in P_-$ assez antidominant.

Alors b correspond à un cycle MV , disons $Z_b \in \text{Irr}(\overline{S_{\lambda+\nu}} \cap \mathcal{G}_\lambda)$,
 et

$$\mu(\overline{Z_b}) = \text{Pol}(b) + \lambda.$$

Cycles MV et polytopes MV

- $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$, donc \mathcal{G} kählérienne, donc \mathcal{G} **symplectique**.
- L'action du tore compact de G^\vee est hamiltonienne
 \rightsquigarrow **application moment** $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{h}$.
- Via le produit scalaire W -invariant, μ est à valeurs dans \mathfrak{h}^* .

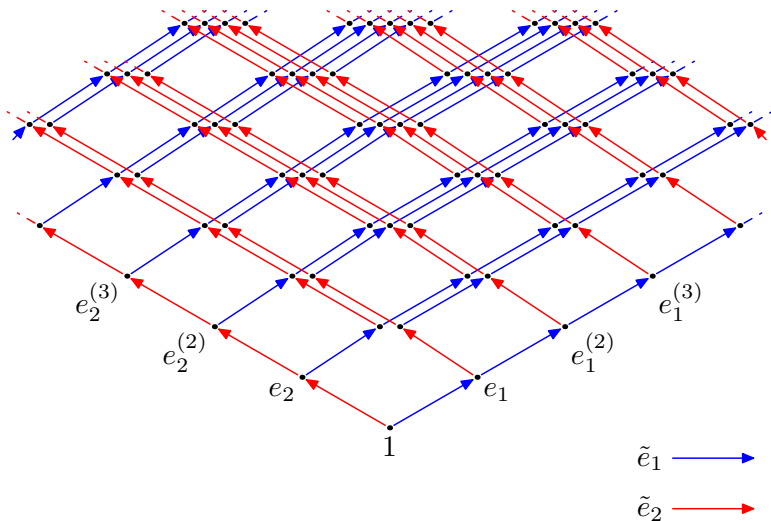
Théorème (Kamnitzer, 2005)

Soit $b \in B(-\infty)$ de poids disons ν . Soit $\lambda \in P_-$ assez antidominant.

Alors b correspond à un cycle MV , disons $Z_b \in \text{Irr}(\overline{S_{\lambda+\nu}} \cap \mathcal{G}_\lambda)$,
 et

$$\mu(\overline{Z_b}) = \text{Pol}(b) + \lambda.$$

Combinatoire sous-jacente : type A_2



Complément

Il y a également existence et unicité en type A_3 . On trouvera les formules explicites dans l'article de Nanhua Xi, Canonical basis for type A_3 , *Comm. Algebra* **27** (1999), 5703–5710. On peut ici vérifier que la partition de $B(-\infty)$ en sous-cônes utilisée par Xi coïncide avec la structure cluster sur l'algèbre des fonctions régulières sur le groupe unipotent maximal, structure qui n'avait pas été inventée à la date du travail de Xi.

[← Retour](#)

Complément

Dans le cas où \mathfrak{g} est simplement lacée et où \mathbf{i} est compatible avec une orientation de carquois, l'ordre $\leq_{\mathbf{i}}$ est la relation de dégénérescence des représentations du carquois (autrement dit, l'opposée de l'inclusion des adhérences d'orbites dans l'espace des représentations).

[← Retour](#)

Complément

Une définition équivalente de cet ordre est

$$b \leq b' \iff \forall \mathbf{i} \in \mathcal{X}, \quad \mathbf{n}(\mathbf{i}, b) \leq \mathbf{n}(\mathbf{i}, b').$$

◀ Retour

Complément

Dans l'article où il définit ses q -multiplicités, Lusztig se place dans le cadre de la grassmannienne affine. Plus précisément, il définit $m_{\lambda,\mu}(q)$ comme la dimension graduée de

$$\mathcal{H}_x^* \mathcal{IC}(\overline{\mathcal{G}_\lambda}),$$

où λ et μ sont des poids dominants et $x \in \mathcal{G}_\mu$.

◀ Retour

Complément

La base de $U(\mathfrak{n}^+)$ annoncée par le théorème est canoniquement indexée par $B(-\infty)$. L'ensemble des cycles MV est donc indexé par $B(-\infty)$. Ce résultat, dû à Braverman, Finkelberg et Gaitsgory (2006), est en fait un des ingrédients de la preuve du théorème.

[← Retour](#)