

## Foire Aux Questions

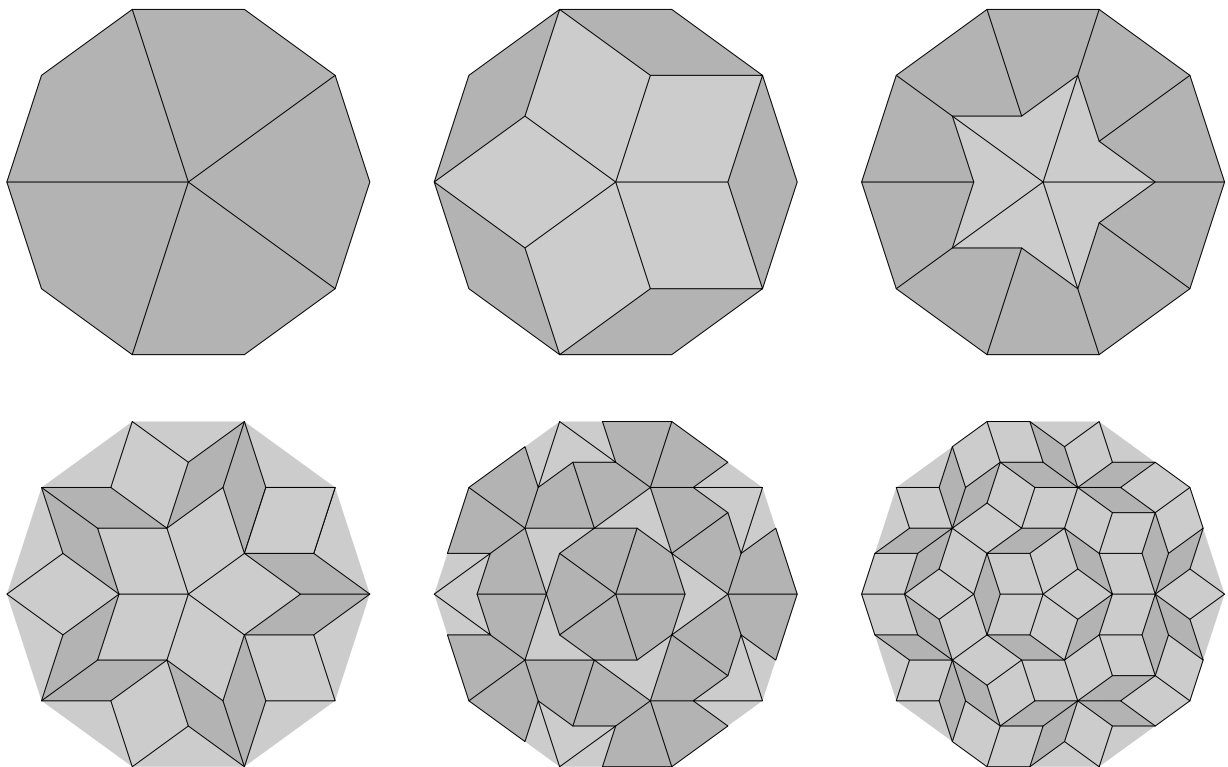
### **Pourquoi le nom de Denis Gratias n'apparaît pas sur le poster ?**

Denis Gratias, physicien français, a collaboré avec Dan Shechtman, et a joué un rôle clé dans l'élaboration des modèles théoriques pour les quasicristaux. Par simplicité, et parce que je n'ai pas étudié les détails de l'histoire, j'ai suivi le comité Nobel, qui n'a récompensé que Dan Shechtman. Mais c'est sans doute une forme de double peine à l'égard de Denis Gratias, dont la contribution était évoquée dès le début des années 1980 dans les journaux de vulgarisation scientifique.

### **Comment montre-t-on qu'il existe un pavage du plan par les tuiles de Penrose, et qu'un tel pavage est nécessairement apériodique ?**

On considère deux puzzles : un avec les deux tuiles losanges, comme sur le poster, et avec les tuiles en forme de cerfs-volants et de flèches. Toutes ces tuiles sont décorées.

Les décorations dessinées sur les tuiles dictent des règles d'assemblage. Quelques essais en respectant ces règles conduisent facilement aux pavages suivants :



On remarque qu'en découpant d'une certaine façon les cerfs-volants et les flèches et en réassemblant les morceaux, on peut passer d'un pavage réalisé avec le second puzzle à un pavage réalisé avec le premier, en respectant les règles d'assemblage. Ceci permet de passer du premier au deuxième pavage ci-dessus, du troisième au quatrième et du cinquième au sixième.

De même, en découpant d'une certaine façon les deux sortes de losanges et en réassemblant les morceaux, on peut passer d'un pavage réalisé avec le premier puzzle à un pavage réalisé avec le second. Ceci permet de passer du deuxième au troisième pavage ci-dessus, et du quatrième au cinquième.

De plus, on voit que le cœur du sixième pavage ci-dessus est identique au deuxième pavage. Après mise à l'échelle, on comprend alors que le procédé de découpage des tuiles fournit un procédé de croissance de la configuration originale, et qu'on peut donc paver tout le plan. Supposons à présent qu'il existe un pavage périodique du plan (pas nécessairement identique à celui obtenu par le procédé décrit ci-dessus). Par le procédé réciproque de celui décrit ci-dessus, on peut réassembler les tuiles du pavage en des tuiles plus grosses. Le nouveau pavage obtenu reste invariant par les mêmes translations que le pavage original. Poursuivant ce procédé, on parvient à un pavage périodique du plan par des tuiles très grandes, plus grandes que le vecteur de la translation laissant le pavage invariant : c'est manifestement impossible.

### Comment classe-t-on les réseaux ?

On se place dans un espace affine euclidien  $\mathcal{E}$ , on appelle  $E$  l'espace vectoriel des translations de  $\mathcal{E}$ , et on note  $\pi : \text{Is}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{O}(E)$  la surjection naturelle.

Un sous-groupe  $\Gamma$  de  $\text{Is}(\mathcal{E})$  est dit cristallographique (ou cocompact) si l'espace homogène  $\Gamma/\text{Is}(\mathcal{E})$  est compact. Les théorèmes de Bieberbach assurent que : 1) Un sous-groupe  $\Gamma$  de  $\text{Is}(\mathcal{E})$  est cristallographique si et seulement si l'ensemble  $\Lambda_\Gamma$  des translations appartenant à  $\Gamma$  est un réseau de  $E$ . 2) Deux sous-groupes cristallographiques de  $\text{Is}(\mathcal{E})$  sont isomorphes si et seulement si ils sont conjugués par un élément du groupe affine de  $\mathcal{E}$ . 3) Il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de sous-groupes cristallographiques de  $\text{Is}(\mathcal{E})$ .

La classe géométrique d'un sous-groupe cristallographique  $\Gamma$  est la classe de conjugaison de  $\pi(\Gamma)$  dans  $\mathbf{O}(E)$ . Le choix d'une base de  $\Lambda_\Gamma$  permet de voir  $\pi(\Gamma)$  comme un sous-groupe de  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$ , où  $n$  est la dimension de  $\mathcal{E}$  ; la classe de conjugaison dans  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$  de ce sous-groupe ne dépend pas du choix de la base de  $\Lambda_\Gamma$  utilisée et est appelée la classe arithmétique de  $\Gamma$ .

En dimension 2, il y a 17 classes d'isomorphisme de groupes cristallographiques, qui donnent 13 classes arithmétiques et 10 classes géométriques.

A un réseau  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{E}$ , on associe le groupe  $\Gamma_{\mathcal{R}} \subseteq \text{Is}(\mathcal{E})$  des isométries de  $\mathcal{E}$  laissant  $\mathcal{R}$  stable. Ce groupe est un groupe cristallographique, et  $\mathcal{R}$  est une orbite du sous-groupe  $\Lambda_{\Gamma_{\mathcal{R}}}$ . Le système cristallographique de Bravais auquel  $\mathcal{R}$  appartient est la classe géométrique du groupe  $\Gamma_{\mathcal{R}}$ . La classe de Bravais de  $\mathcal{R}$  est la classe arithmétique de  $\Gamma_{\mathcal{R}}$ .

En dimension 2, il y a 5 classes de Bravais (réseaux généraux, réseaux rectangulaires, réseaux rhombiques, réseaux carrés, réseaux hexagonaux). Les réseaux rectangulaires et les réseaux rhombiques appartiennent au même système cristallographique (dans les deux cas, le groupe  $\pi(\Gamma_{\mathcal{R}})$  est un sous-groupe diédral d'ordre 4 de  $\mathbf{O}(E)$ ).

En dimension 3, il y a 219 groupes cristallographiques à isomorphisme près (c'est-à-dire, à conjugaison près par un élément du groupe affine), 73 classes arithmétiques, 32 classes géométriques, 14 classes de Bravais, et 7 systèmes cristallographiques. Les cristallographes

parlent de 230 groupes cristallographiques : ils examinent les sous-groupes cristallographiques de  $Is(\mathcal{E})$  à conjugaison par une transformation affine préservant l'orientation près.

### **Pourquoi s'est-on focalisé sur l'alliage ytterbium-cadmium pour l'étude de la structure atomique précise d'un quasicristal ?**

Les premiers quasicristaux stables obtenus étaient des alliages ternaires, autrement dit formés de trois métaux. L'alliage ytterbium-cadmium a été le premier quasicristal stable d'un alliage binaire.

### **Le nombre d'or intervient-il dans le pavage de Penrose ? Et dans le triacontaèdre rhombique ?**

Oui et oui. Les angles aux sommets des tuiles de Penrose sont toutes multiples de  $\pi/5$ , et l'on sait que  $\cos(\pi/5) = \varphi/2$ , avec  $\varphi = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1,618$  le nombre d'or. En outre, chaque face du triacontaèdre rhombique est un losange, dont le rapport des longueurs des diagonales vaut  $\varphi$ .

### **Pourquoi un cristal forme-t-il des figures de diffraction ?**

L'idée est que la répétition périodique d'une structure va causer un phénomène de résonance dans certaines directions, provoquant ainsi l'apparition de tâches lumineuses intenses. De façon plus précise, la figure de diffraction est (le carré du module de) la transformée de Fourier de la densité électronique du matériau illuminé. Ainsi, quand on fait diffracter la lumière sur un réseau, on obtient comme image le réseau dual (formule sommatoire de Poisson). Et si l'on fait diffracter la lumière sur un motif répété selon un réseau, on obtient comme image la transformée de Fourier du produit de convolution de la mesure de Dirac sur le réseau par le motif seul, autrement dit, le produit de la mesure de Dirac sur le réseau dual par la transformée de Fourier du motif.

Voici une justification rapide du fait que la figure de diffraction est donnée par la transformation de Fourier. La lumière arrivant sur le cristal se présente comme une onde monochromatique plane

$$\Phi_{\text{in}}(x) = \Phi_0 \exp(i\langle k_{\text{in}} | x \rangle).$$

Un électron placé en position  $y$  va diffracter cette onde de façon élastique en réémettant une onde sphérique ; mesurée au point  $x$ , cette onde sera

$$\frac{\Phi_0}{\|x - y\|} \exp(i\langle k_{\text{in}} | y \rangle) \exp(i\langle k_{\text{out}} | x - y \rangle),$$

avec  $k_{\text{out}}$  colinéaire à  $x - y$  et de même norme que  $k_{\text{in}}$  (hypothèse de diffusion élastique). Sommant sur tous les électrons du matériau illuminé, on obtient en fin de compte

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{in}}(x) &= \Phi_0 \int \frac{1}{\|x - y\|} \exp(i\langle k_{\text{in}} | y \rangle) \exp(i\langle k_{\text{out}} | x - y \rangle) \rho(y) dy \\ &\approx C \exp(i\langle k_{\text{out}} | x \rangle) \widehat{\rho}(k_{\text{out}} - k_{\text{in}}), \end{aligned}$$

où  $\rho(y)$  est la densité électronique et  $\widehat{\rho}$  est sa transformée de Fourier.

### **Pourquoi la méthode « couper et projeter » fournit-elle des ensembles de points dont l'image de diffraction présente des tâches brillantes ?**

On utilise la méthode « couper et projeter » décrite sur le poster. On a notre réseau  $R$  et le sous-espace vectoriel  $F$ . Soit  $S$  l'ensemble des points voisins de  $F$ , autrement dit, la tranche rose de la figure du poster, et soit  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ . On s'intéresse donc à la transformée de Fourier de la somme des mesures de Dirac sur chaque point de l'ensemble  $p(R \cap S)$ .

La formule sommatoire de Poisson affirme que la transformation de Fourier de la mesure de Dirac de  $R$  est la mesure de Dirac du réseau dual. Ici, on a deux opérations supplémentaires : 1) l'intersection avec  $S$ , autrement dit la multiplication par la fonction indicatrice de  $S$ , qui se traduit par un produit de convolution au niveau de la transformée de Fourier ; 2) la projection  $p$ , qui se traduit par la restriction à un sous-espace après transformation de Fourier. Ces deux opérations préservent le fait que la transformée de Fourier possède une partie singulière.

### **Quelles références ai-je utilisées ?**

Marjorie Senechal et Jean Taylor, Quasicrystals : The view from Les Houches, The Mathematical Intelligencer 12 (1990), 54-64.

Marjorie Senechal et Jean Taylor, Quasicrystals : The view from Stockholm, The Mathematical Intelligencer 35 (2013), 1-9.

Pierre de la Harpe, Ornaments et cristaux, pavages et groupes, Image des mathématiques, <http://images.math.cnrs.fr/Ornements-et-cristaux-pavages-et.html>

Pierre de la Harpe et Félix Kwok, Prix Nobel de chimie, quasi-cristaux, périodicité et pavages de Penrose, Image des mathématiques, <http://images.math.cnrs.fr/Prix-Nobel-de-chimie-quasi.html>